

**UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID**  
**FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS**



**TESIS DOCTORAL**

**Medidas de dispersión ordinal: aplicaciones a la medición del  
impacto de etiquetas lingüísticas y a problemas de decisión  
multicriterio con operadores OWA**

**MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR**

**PRESENTADA POR**

**Nuria Martínez Martín**

**Directores**

**Francisco Javier Montero de Juan**  
**Daniel Gómez González**

**Madrid**

**© Nuria Martínez Martín, 2019**

Programa de Doctorado en Ingeniería Matemática, Estadística e  
Investigación Operativa por la Universidad Complutense de  
Madrid y la Universidad Politécnica de Madrid



---

**Medidas de Dispersión Ordinal: aplicaciones a la medición  
del impacto de etiquetas lingüísticas y a problemas de  
decisión multicriterio con operadores OWA**

---

**TESIS DOCTORAL**

**Nuria Martínez Martín**

**Directores:**

**Francisco Javier Montero de Juan**

**Daniel Gómez González**

Octubre 2019





UNIVERSIDAD  
**COMPLUTENSE**  
MADRID

**DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD DE LA TESIS  
PRESENTADA PARA OBTENER EL TÍTULO DE DOCTOR**

Dña. NURIA MARTÍNEZ MARTÍN, estudiante en el Programa de Doctorado INGENIERÍA MATEMÁTICA, ESTADÍSTICA E INVESTIGACIÓN OPERATIVA, de la Facultad de CIENCIAS MATEMÁTICAS de la Universidad Complutense de Madrid, como autora de la tesis presentada para la obtención del título de Doctor y titulada:

MEDIDAS DE DISPERSIÓN ORDINAL: APLICACIONES A LA MEDICIÓN DEL IMPACTO DE ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS Y A PROBLEMAS DE DECISIÓN MULTICRITERIO CON OPERADORES OWA.

Y dirigida por: DANIEL GÓMEZ GONZÁLEZ Y JAVIER MONTERO DE JUAN.

**DECLARO QUE:**

La tesis es una obra original que no infringe los derechos de propiedad intelectual ni los derechos de propiedad industrial u otros, de acuerdo con el ordenamiento jurídico vigente, en particular, la Ley de Propiedad Intelectual (R.D. legislativo 1/1996, de 12 de abril, por el que se aprueba el texto refundido de la Ley de Propiedad Intelectual, modificado por la Ley 2/2019, de 1 de marzo, regularizando, aclarando y armonizando las disposiciones legales vigentes sobre la materia), en particular, las disposiciones referidas al derecho de cita.

Del mismo modo, asumo frente a la Universidad cualquier responsabilidad que pudiera derivarse de la autoría o falta de originalidad del contenido de la tesis presentada de conformidad con el ordenamiento jurídico vigente.

En Madrid, a 29 de Octubre de 2019.

Fdo.:



*A mis padres, por todo, pero en particular por enseñarme a reconocer los  
estímulos intelectuales de la vida diaria y a buscar un optimista pero  
equilibrado entusiasmo.*

*A Samuel, por su gran apoyo, su constancia y su confianza en mí.*

*A Simón y Sandra, por la inmensa alegría e inocente motivación que han  
traído a mi vida.*



## **AGRADECIMIENTOS**

A mis directores Daniel Gómez y Javier Montero, sin cuya inestimable ayuda, motivación, paciencia y tiempo, este trabajo no habría llegado a su fin. Hemos pasado por varios momentos importantes, tanto profesionales y académicos como personales, durante los cuales su entusiasmo y energía han sido fundamentales. ¡Muchas gracias, por todo!.

A mis amigos y a mis compañeros de investigación, que me han apoyado estos años y han escuchado mis *divagaciones* sobre este tema, que tanto me ha apasionado. En especial a Julia, por su siempre constructiva dedicación en esta fase final. Y a tantas personas que de forma directa o indirecta me han ayudado a lo largo de estos años.

Finalmente, un enorme agradecimiento a toda mi familia, en especial a mis padres y a Samuel, por creer en mí y no dejarme rendirme, por su tiempo y su ayuda en este proyecto que sin ellos, no habría sido posible.





El pensamiento complejo requiere esfuerzo y a la hora de escoger entre dos caminos, nuestro cerebro suele elegir el más sencillo. El esfuerzo mental supone un coste y el cerebro tiende a economizarlo.

Daniel Kahneman



# ÍNDICE

Resumen .....	1
Abstract .....	3
1 Introducción .....	5
1.1 Motivación .....	5
1.1.1 Variabilidad de los datos – conceptos y contextos de uso .....	5
1.1.2 Medición de la variabilidad en función de la naturaleza de las variables .....	6
1.1.3 Medición de la dispersión ordinal .....	8
1.2 Objetivos.....	10
1.2.1 Objetivo general .....	10
1.2.2 Objetivos específicos .....	10
1.3 Metodología .....	10
1.4 Estructura.....	12
2 Medidas de dispersión en variables ordinales.....	15
2.1 Conceptos básicos y notación .....	15
2.1.1 Medidas de tendencia central en variables ordinales .....	18
2.2 Variación Ordinal de Leik (LOV) - Leik (1966).....	21
2.3 Índice de variación ordinal (IOV) - Berry y Mielke (1992) .....	23
2.4 Coeficiente de Variación Ordinal (COV) - Kvalseth (1995) .....	28
2.5 Medida de dispersión ( $1-I^2$ ) - Blair y Lacy (1996, 2000) .....	31
2.6 Consenso (Csn) y Disenso (Dsn) - Tastle y Wierman (2007) .....	36
2.7 Entropía muestral de Shannon (H) - Shannon (1948).....	39
2.8 Medidas de dispersión ordinal no cuantitativas .....	40
2.9 Resumen .....	41

3	Clasificación de las medidas de dispersión existentes: propiedades, análisis y equivalencia.....	43
3.1	Tipo de output.....	44
3.2	No negatividad .....	45
3.3	Invarianza de la escala (Independencia de N) .....	46
3.4	Valores de frontera .....	48
3.5	Mitosis .....	50
3.6	Índice $D \in [0,1]$ .....	55
3.7	Invarianza frente a traslaciones.....	56
3.8	Invarianza frente a permutaciones.....	61
3.9	Invarianza frente a distribuciones complementarias .....	62
3.10	Monotonía en $k = 2$ . Linealidad, concavidad y convexidad .....	66
3.11	Independencia a valores extremos en situaciones simétricas .....	68
3.12	Discusión sobre las medidas de dispersión ordinales.....	70
3.13	Equivalencia entre funciones de dispersión.....	72
3.14	Equivalencia de las medidas de dispersión existentes para variables ordinales .....	77
3.15	Conclusiones sobre la clasificación de medidas existentes .....	80
4	Generalización de las medidas de dispersión para variables ordinales.	81
4.1	Enfoque general de las medidas existentes .....	81
4.2	Interpretación de las medidas propuestas.....	87
4.3	Relación entre las medidas propuestas y las medidas existentes...	89
5	Análisis paramétrico de las diferencias entre categorías de una variable ordinal.....	93
5.1	Hipótesis sobre la matriz de diferencias W .....	93

5.1.1	No negatividad .....	93
5.1.2	Distancia nula.....	93
5.1.3	Concordancia entre categorías .....	93
5.1.4	Simetría.....	94
5.2	Matriz de diferencias en escalas ordinales con clases.....	94
5.3	Cálculo de la matriz de diferencias W .....	97
5.3.1	Matriz de diferencias semi-automática en escalas de Likert ....	98
5.3.2	Matriz de diferencias semi-automática en escalas ordinales con clases .....	99
5.4	Propiedades de la función de dispersión para una escala ordinal con s clases y matriz de diferencias semi-automática $W^\alpha$ .....	102
5.4.1	Resumen de propiedades de las medidas propuestas .....	114
6	Medición del impacto de la naturaleza de las etiquetas en el diseño de un cuestionario .....	117
6.1	Objetivos del estudio.....	117
6.1.1	Objetivo Principal .....	117
6.1.2	Objetivos Específicos .....	117
6.2	Marco teórico .....	118
6.2.1	Escalas ordinales.....	118
6.2.2	Limitaciones y factores a tener en cuenta en las escalas ordinales.....	119
6.2.3	Lógica difusa aplicada en este contexto.....	120
6.3	Experimento: diseño y materiales.....	122
6.4	Metodología .....	125
6.4.1	Análisis de variables unidimensionales .....	127
6.4.2	Discrepancias (cambios de opinión) .....	129
6.4.3	Relación entre el impacto de las etiquetas y el consenso generado en la pregunta.....	131

6.4.4	Asimetría en el impacto .....	133
6.4.5	Traslación de opiniones.....	136
6.5	Resultados.....	138
6.5.1	Análisis de variables unidimensionales .....	138
6.5.2	Discrepancias (cambios de opinión).....	143
6.5.3	Relación entre el impacto de las etiquetas y el consenso generado en la pregunta.....	145
6.5.4	Asimetría en el impacto .....	151
6.5.5	Traslación de opiniones.....	159
6.6	Conclusiones.....	163
6.6.1	Objetivo específico 1 - ¿Influyen las preguntas en el impacto de las etiquetas?.....	163
6.6.2	Objetivo específico 2 - ¿Cómo influye el consenso/dispersión previo en el impacto de las etiquetas? .....	164
6.6.3	Objetivo específico 3 - ¿Existe algún tipo de tendencia / asimetría en la traslación de las respuestas dadas con etiquetas lingüísticas a las respuestas dadas con etiquetas frecuentistas? .....	164
7	Aplicaciones: Nueva determinación de los pesos OWA basada en medidas de dispersión ordinal .....	167
7.1	Introducción .....	167
7.2	Preliminares.....	169
7.2.1	Operadores de agregación: operadores de agregación OWA .	169
7.2.2	Determinación de los pesos OWA mediante la entropía y el <i>orness</i> .....	170
7.2.3	Medidas de dispersión ordinales y nominales .....	173
7.3	Una nueva forma para determinar pesos de los operadores OWA: operadores de agregación MOOWA .....	176
7.4	Algunas propiedades de los operadores de agregación MOOWA ..	184
7.5	Conclusiones.....	188

8	Conclusiones y futuras líneas de investigación .....	191
8.1	Conclusiones .....	191
8.2	Contribuciones relacionadas con este trabajo .....	194
8.2.1	Artículos en revistas .....	194
8.2.2	Otras publicaciones .....	195
8.2.3	Contribuciones a congresos .....	195
8.3	Futuras líneas de investigación .....	196
9	Bibliografía.....	201
10	Anexos .....	211
10.1	Cuestionario online – Versión etiquetas lingüísticas .....	211
10.2	Cuestionario online – Versión etiquetas frecuentistas .....	214
10.3	Tablas de contingencia .....	217
10.4	Gráficos de distribuciones frecuentistas condicionadas a cada etiqueta lingüística.....	219





# ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1.1 –Tipos de escalas, operaciones invariantes y estadísticas apropiadas para cada tipo de escala (Stevens, 1946) .....</i>	<i>7</i>
<i>Figura 2.1 –Representación geométrica de la medida de Blair y Lacy si N par y k=3 (Blair y Lacy,1996) ..</i>	<i>32</i>
<i>Figura 2.2 –Representación geométrica de la medida de Blair y Lacy si N impar y k=3 (Blair y Lacy,1996) .....</i>	<i>33</i>
<i>Figura 3.1 – Representación gráfica de los vectores de frecuencias relativas del Ejemplo 3.5 .....</i>	<i>78</i>
<i>Figura 4.1 – Ejemplo de distribución de una variable ordinal donde el concepto de distancia no está definido (Franceschini et al., 2004).....</i>	<i>83</i>
<i>Figura 4.2 – Explicación gráfica de la Observación 4.3 .....</i>	<i>87</i>
<i>Figura 4.3 –Frecuencia relativa de los saltos del Ejemplo 4.2 .....</i>	<i>88</i>
<i>Figura 5.1 –Estructura de <math>W^\alpha</math> para el ejemplo de Standard &amp; Poor's .....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 5.2 – <math>W^\alpha</math> con <math>\alpha = (1,2,3,4)</math> para el ejemplo de Standard &amp; Poor's.....</i>	<i>101</i>
<i>Figura 6.1 – Distribución de Ling y Frec por pregunta J.....</i>	<i>139</i>
<i>Figura 6.2 – Distribución acumulada de Ling y Frec por pregunta J.....</i>	<i>141</i>
<i>Figura 6.3 – Intervalos de Confianza de la Discrepancia por pregunta (de mayor a menor) .....</i>	<i>145</i>
<i>Figura 6.4 – Dispersión promedio (diferentes medidas) vs. Discrepancia por pregunta .....</i>	<i>149</i>
<i>Figura 6.5 –Gráficos de respuestas Lingüísticas vs. Frecuentistas por pregunta (Champú).....</i>	<i>152</i>
<i>Figura 6.6 –Gráficos de respuestas Lingüísticas vs. Frecuentistas por pregunta (Sostenibilidad).....</i>	<i>153</i>
<i>Figura 6.7 –Distribución de <math>Diff^f</math> .....</i>	<i>155</i>
<i>Figura 6.8 – Diagrama de caja de <math>Diff^f</math> (<math>Diff^f(i) = ling_i^f - frec_i^f</math>) .....</i>	<i>156</i>
<i>Figura 6.9 –Selección de gráficos de distribuciones frecuentistas condicionadas a cada etiqueta lingüística (Champú).....</i>	<i>160</i>
<i>Figura 6.10 – Selección de gráficos de distribuciones frecuentistas condicionadas a cada etiqueta lingüística (Sostenibilidad).....</i>	<i>160</i>
<i>Figura 7.1 – Valores de la entropía acotada y la dispersión ordinal frente al orness.....</i>	<i>175</i>

<i>Figura 7.2 – Valores del trade-off para los pesos asociados a 1.150 vectores óptimos (MEOWA y MOOWA) para niveles de orness entre (0.1, 0.9) .....</i>	<i>188</i>
---	------------

# ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 - Ejemplo de variable estadística ordinal (escalas y distribuciones) .....	17
Tabla 2.2 - Medidas de dispersión cualitativas del capítulo 2 (en orden cronológico) .....	42
Tabla 3.1 - Dispersión de vectores con mediana única central con las diferentes medidas .....	69
Tabla 3.2 - Resumen del análisis de las propiedades de las medidas del capítulo 2 (en rojo las medidas que son diferentes del resto en cada propiedad) .....	71
Tabla 3.3 - Ejemplo 3.5 Frecuencias relativas de 5 vectores en una escala de Likert .....	77
Tabla 3.4 - Dispersión de los vectores del Ejemplo 3.5 con las medidas del capítulo 2 .....	78
Tabla 3.5 - Ejemplos ordenados decrecientemente según su dispersión con cada medida .....	79
Tabla 5.1 - Propositiones para el análisis de las propiedades de $\Phi_{W\alpha}$ y $\Phi_{W\alpha Med\_u}$ .....	103
Tabla 5.2 - Dispersión de vectores con mediana única central con $\Phi_W^\alpha$ .....	112
Tabla 5.3 - Dispersión de vectores con mediana única central con $\Phi_{W^\alpha Med\_u}$ .....	112
Tabla 5.4 - Resumen del análisis de las propiedades de $\Phi_W^\alpha$ y $\Phi_{W^\alpha Med\_u}$ .....	114
Tabla 6.1 - Esquema ilustrativo de la base de datos que recoge la variable ( $Ling^J$ , $Frec^J$ ) .....	125
Tabla 6.2 - Esquema ilustrativo de los vectores de frecuencias y frecuencias relativas de las distribuciones marginales de ( $Ling^J$ , $Frec^J$ ) .....	126
Tabla 6.3 - Ejemplo de homogeneidad marginal como condición no suficiente .....	129
Tabla 6.4 - Medidas de tendencia central de $Ling$ y $Frec$ por pregunta $J$ .....	140
Tabla 6.5 - P-valores del contraste de homogeneidad marginal (resaltado si $p$ -valor $< 0.05$ ) .....	142
Tabla 6.6 - Porcentaje de discrepancias e intervalo de confianza por pregunta $J$ .....	144
Tabla 6.7 - Medidas de dispersión por pregunta y método (Cada columna muestra una gradación de colores de Microsoft Excel de Verde a Rojo donde Verde indica los valores de dispersión más bajos y Rojo los valores de dispersión más altos) .....	146
Tabla 6.8 - P-valores del contraste de normalidad de las medidas de dispersión .....	147
Tabla 6.9 - P-valores del contraste de similaridad de varianzas de las medidas de dispersión .....	148
Tabla 6.10 - P-valores del contraste de medias pareadas de las medidas de dispersión .....	148

<i>Tabla 6.11 – Resultados modelos regresión multivariante .....</i>	<i>150</i>
<i>Tabla 6.12 – Ejemplo de tabla de contingencia de la pregunta 1 de la sección “Champú”.....</i>	<i>151</i>
<i>Tabla 6.13 - Relación entre las respuestas lingüísticas y frecuentistas dadas a una pregunta por el individuo i-ésimo.....</i>	<i>157</i>
<i>Tabla 6.14 – Discrepancias laterales método lingüístico vs. frecuentista : Promedios e IC (ordenados de menor a mayor según extremo inferior del IC) .....</i>	<i>158</i>
<i>Tabla 6.15 - Resultados del Test ANOVA Dispersión.....</i>	<i>161</i>
<i>Tabla 6.16 - Test de Newman-Keuls aplicado a las diferentes medidas de dispersión .....</i>	<i>162</i>
<i>Tabla 7.1 - Orness, entropía acotada y dispersión ordinal <math>\Phi_{  }</math> para algunos vectores de pesos 5-dimensionales ordenados de acuerdo a su orness de forma decreciente desde 1 a 0.8 .....</i>	<i>174</i>
<i>Tabla 7.2 - Comparación entre la dispersión y entropía para un valor de orness dado .....</i>	<i>176</i>
<i>Tabla 7.3 - Evaluación en <math>[0,1]</math> de las 10 motocicletas para cada uno de los 3 criterios.....</i>	<i>180</i>
<i>Tabla 7.4 - Evaluación ordenada en <math>[0,1]</math> de las 10 motocicletas basada en el mejor, medio y peor criterio .....</i>	<i>181</i>
<i>Tabla 7.5 - Motocicletas ordenadas según diferentes operadores OWA .....</i>	<i>182</i>
<i>Tabla 7.6 - Valoración de motocicletas con MEOWA y MOOWA según niveles de exigencia (<math>\alpha</math>) .....</i>	<i>182</i>
<i>Tabla 7.7 - Orden de motocicletas con MEOWA y MOOWA según niveles de exigencia (<math>\alpha</math>).....</i>	<i>183</i>
<i>Tabla 8.1 - Ejemplos ficticios de evolución del consenso y medidas de dispersión asociadas .....</i>	<i>197</i>

## Resumen

Esta memoria está dedicada al análisis de la dispersión de datos de naturaleza cualitativa ordinal. En ella comenzamos haciendo una revisión profunda del estado del arte analizando y formulando rigurosamente las medidas de dispersión ordinal encontradas. A continuación estudiamos las propiedades existentes en la literatura y proponemos otras nuevas propiedades relevantes para las medidas de dispersión. Seguidamente clasificamos las medidas de dispersión ordinal en función de las propiedades que verifican. También introducimos una relación de equivalencia entre medidas de dispersión ordinal que nos permite agruparlas.

Gracias al análisis anterior nos es posible proponer dos generalizaciones de forma paramétrica que pueden ser calculadas ad-hoc en función del problema planteado. Proponemos también su uso en un escenario de escalas ordinales con clases (que definimos como aquellas que presentan una estructura que hace una partición de las categorías en función del significado de la escala; por ejemplo la clase del acuerdo, de la neutralidad y del desacuerdo en una escala de Likert). A continuación analizamos las propiedades de ambas propuestas de generalización de medidas de dispersión y la relación con las medidas de dispersión presentadas.

Finalmente, presentamos dos casos de uso de las medidas propuestas. El primero es el experimento motivador de esta memoria en el que se quiere cuantificar el impacto del uso de etiquetas lingüísticas o frecuentistas para demostrar la necesidad de modelar la distancia entre las categorías de una escala ordinal. La segunda aplicación consiste en utilizar las medidas propuestas para calcular los pesos asociados a operadores OWA para su uso en problemas de decisión multicriterio.

**Palabras clave (código UNESCO):** Estadística analítica (120901), Cálculo en Estadística (120902), Teoría y procesos de decisión (120904), Análisis de datos (120903), Fuzzy sets (120799).



## Abstract

This work is dedicated to the analysis of dispersion when dealing with qualitative ordinal data. We start by doing an in-depth review of the state of art where we analyze and formulate in a rigorous way the measures of ordinal dispersion found. Afterwards, we study the existing properties and we propose other new relevant properties for ordinal dispersion measures. It is possible to classify the measures based on their accomplishment of the different properties. We also introduce an equivalence relationship that allows us to group the existing measures.

Based on the previous described analysis, we are able to introduce two generalizations in a parametric way that can be calculated ad-hoc depending on the problem. We propose the usage of them in the framework of ordinal scales with classes (that we defined as those with a structure that partitions the categories based on the meaning of the scale; for example a Likert scale presents the agreement, neutral and disagreement classes). We then analyze the properties of both proposals and the relationship with the existing ordinal dispersion measures.

Finally, we introduce two cases of usage of the proposed measures. The first one is the experiment that motivated this dissertation in which we wanted to quantify the impact of using linguistic vs. frequentist labels to show the need of being able to model the distance between categories in an ordinal scale. In the second application we propose the usage of the new dispersion measures to calculate the weights associated to OWA operators within their usage in multicriteria decision problems.

**Keywords (UNESCO code):** Analytical statistics (120901), Computing for statistics (120902), Decision procedures and theory (120904), Data analysis (120903), Fuzzy sets (120799).





# 1 Introducción

## 1.1 Motivación

### 1.1.1 Variabilidad de los datos – conceptos y contextos de uso

Esta memoria está dedicada a uno de los conceptos más importantes que existen en Estadística: "la variabilidad" de los datos. La variabilidad se refiere a la cantidad de variación de los datos y tiene su origen etimológico en la palabra latina "variatio" que significa diferencia, divergencia o variación.

En la literatura (Gini 1912; Fisher, 1919; Fisher, 1934; David, 1998; DeGroot y Schervish, 2012; Gagolewski, 2015) pueden encontrarse diferentes nombres, conceptos o ideas asociadas al término variabilidad. El término más general es el de dispersión vs. la concentración de un conjunto de datos. También son habituales los términos similitud o afinidad frente a disimilitud o también la homogeneidad vs. heterogeneidad de los datos. En Física se utilizan además los conceptos de inercia de una nube de puntos respecto a un sistema de referencia y el concepto de entropía (Shannon, 1948), este último también usado en Teoría de la Información y Economía.

El concepto de la variabilidad en el análisis estadístico de la información ha jugado un papel relevante desde las primeras aplicaciones de la Estadística. Harter (1978) y García-Lapresta y Borge (2018), apuntan una de sus primeras menciones en una cita de Ptolomeo en el siglo II a.C. La variabilidad de un proceso aleatorio hace referencia a la incertidumbre asociada a un experimento aleatorio o en un simple análisis de datos a la heterogeneidad de los mismos (DeGroot y Schervish, 2012; Jeffreys, 1998; Fisher, 1934; Spiegel, 2009). Existen multitud de técnicas estadísticas en las que es una absoluta prioridad cuantificar la incertidumbre y la variabilidad de un conjunto de datos (o de un proceso aleatorio) para llevar a cabo un buen estudio y escoger un modelo adecuado. Algunos posibles ejemplos son: el análisis de regresión, modelos de clasificación, diseños muestrales, análisis de la

varianza, técnicas de muestreo, problemas de machine learning, random forest, clustering, medidas de consenso, redes neuronales y un largo etcétera. En todas estas situaciones está incoada la idea de la variabilidad y por tanto es necesario poder cuantificarla para llevar a cabo un estudio correcto.

La variabilidad es también de gran importancia en problemas de naturaleza borrosa. Se aplica por ejemplo en problemas de modelización borrosa de variables lingüísticas, en problemas de operadores de agregación, dentro de los que cabe mencionar especialmente los operadores OWA (Yager, 1988) en los que las medidas de dispersión sirven para determinar los pesos (como se verá en el capítulo 7 de esta memoria) o en problemas de clusterización en el mundo difuso (k-means vs. fuzzy c-means). Además, la dispersión es muy relevante a la hora de medir la fiabilidad de sistemas de clasificación borrosos (Gómez, Zarrazola, Yáñez y Montero, 2015a) o en problemas de segmentación borrosa de imágenes (Gómez *et al.*, 2015b).

#### 1.1.2 Medición de la variabilidad en función de la naturaleza de las variables

Para poder estudiar medidas de dispersión o variabilidad en variables estadísticas, es necesario primero hacer mención a la naturaleza de las variables. Como puede verse en DeGroot y Schervish (2012), Jeffreys (1998) o Fisher (1934), entre muchos otros, las variables estadísticas se clasifican en dos grandes grupos en función de la naturaleza de los valores que tomen las mismas:

- Variables cuantitativas (continuas o discretas): cuando la variable toma valores numéricos. Éstas pueden ser de naturaleza continua, como la estatura o el peso, o variables numéricas discretas, tales como el número de hijos.
- Variables cualitativas o categóricas (nominales u ordinales): cuando se recogen atributos medidos con valores de tipo cualitativo. Se pueden tratar de atributos nominales cuando no existe ningún tipo de relación

de orden entre ellos, por ejemplo el color de pelo, o de atributos ordinales, cuando se puede establecer un orden entre los posibles valores, como por ejemplo el grado de acuerdo con una determinada afirmación.

Este tipo de variables surgen de la recogida de datos con escalas de diferentes naturaleza. Stevens (1946) propuso en un artículo de gran influencia cuatro escalas y estableció las operaciones y los análisis estadísticos permitidos para cada una de ellas:

TABLE 1

Scale	Basic Empirical Operations	Mathematical Group Structure	Permissible Statistics (invariantive)
NOMINAL	Determination of equality	<i>Permutation group</i> $x' = f(x)$ $f(x)$ means any one-to-one substitution	Number of cases Mode Contingency correlation
ORDINAL	Determination of greater or less	<i>Isotonic group</i> $x' = f(x)$ $f(x)$ means any monotonic increasing function	Median Percentiles
INTERVAL	Determination of equality of intervals or differences	<i>General linear group</i> $x' = ax + b$	Mean Standard deviation Rank-order correlation Product-moment correlation
RATIO	Determination of equality of ratios	<i>Similarity group</i> $x' = ax$	Coefficient of variation

Figura 1.1 –Tipos de escalas, operaciones invariantes y estadísticas apropiadas para cada tipo de escala (Stevens, 1946)

Aunque existe una gran aceptación sobre el concepto de variabilidad o dispersión de variables de naturaleza cuantitativa (algunas de las medidas más frecuentemente utilizadas para representar dichos conceptos son la varianza, la desviación típica o el coeficiente de variación), muchas más dudas genera el concepto de variabilidad para variables de naturaleza cualitativa.

Para variables cualitativas nominales se encuentran algunos estudios en profundidad sobre su uso sociológico y el tratamiento estadístico de la variación para este tipo de variables (Agresti y Agresti, 1978) y se usan medidas como la razón de variación o el índice de variación cualitativa.

En el caso de las variables cualitativas ordinales, entre las que se encuentran las variables recogidas mediante una escala de Likert (1932), Blair y Lacy

(2000) afirman que no existe un tratamiento para datos ordinales equivalente al llevado a cabo por Agresti y Agresti (1978) para variables nominales. Existen varios autores que han abordado en detalle las medidas de variación para variables ordinales, tal y como veremos en la sección siguiente y a lo largo del capítulo 2.

### 1.1.3 Medición de la dispersión ordinal

Se han revisado varios autores que analizan de forma general los enfoques utilizados para la medición de la dispersión ordinal (Blair y Lacy, 2000; Kampen y Swyngedouw, 2000; Franceschini, Galetto y Varetto, 2004; Bashkansky y Gadrich, 2008; Jamieson, 2004; Akiyama, Nolan, Darrah, Rahem y Wang, 2016; entre otros), encontrando que todavía hoy es un procedimiento muy habitual transformar las variables de naturaleza ordinal en variables sobre una escala numérica y aplicar entonces medidas de dispersión como la varianza o la desviación típica. Este procedimiento es poco adecuado y puede llevar a conclusiones ilógicas o erróneas (ver ejemplos en: Blair y Lacy, 2000; Franceschini *et al.*, 2004; Bashkansky y Gadrich, 2008). También es muy común encontrar el uso de la entropía, propia de variables cualitativas nominales (como se verá en esta memoria), para medir la variabilidad de un conjunto de datos de naturaleza cualitativa ordinal.

Y es que, tal y como apuntaba Lehman (1991), desde 1966, año en el que Leik propuso su medida de dispersión ordinal, en la literatura no se encuentran otras medidas propias de este tipo de variables; hay que esperar a 1992 para que surjan nuevas medidas de dispersión ordinal, y las que se hallan desde entonces hasta hoy no son muchas y no están estudiadas en profundidad. En Gadrich y Bashkansky (2012) o en Gadrich, Bashkansky y Zitikis (2015) puede verse un resumen de las diferentes medidas de dispersión ordinal encontradas hasta la fecha. Existen otros autores posteriores, no muy numerosos, que también abordan este tema de medidas de dispersión ordinal (por ejemplo Akiyama *et al.* 2016 o García-Lapresta y Borge, 2018, entre otros).

Por este motivo en esta memoria se presenta un análisis detallado sobre los diferentes conceptos o ideas asociadas al término variabilidad así como las diferentes maneras encontradas para cuantificarla en variables de naturaleza ordinal. También se proponen unas medidas que generalizan las medidas cuantitativas de dispersión ordinal encontradas hasta el momento y que permiten resolver algunos problemas detectados en las medidas anteriores.

Existen numerosos escenarios en los que podrían aplicarse las nuevas medidas de dispersión: cualquier técnica estadística que utilice la varianza o la entropía con variables de naturaleza ordinal es susceptible de ser estudiada aplicando las medidas de dispersión propuestas en esta memoria. Por ejemplo a técnicas de reconocimiento de imágenes, en la clasificación supervisada, en árboles de decisión, etc. También en el contexto de medición del consenso en el que a menudo se utiliza la entropía y que no recoge las situaciones de polaridad que se expondrán en el análisis de las propiedades (ver 3.4).

En esta memoria se han elegido 2 problemas de muy diferente naturaleza como motivación y ejemplo de algunas posibles aplicaciones:

1. Medición del impacto de la naturaleza de las etiquetas (lingüísticas o frecuentistas) en la interpretación de la escala de Likert: problema original que motivó esta memoria cuyo objetivo inicial era analizar la distancia percibida entre las etiquetas ordinales, y para el que además se llevará a cabo el análisis de las respuestas y conclusiones de una encuesta utilizando las medidas de dispersión propuestas.
2. Uso de las nuevas medidas de dispersión ordinal en la determinación de los pesos en operadores de agregación OWA en problemas de decisión multicriterio.

## **1.2 Objetivos**

### **1.2.1 Objetivo general**

Analizar y formular rigurosamente las medidas cuantitativas de dispersión ordinal encontradas hasta la fecha y presentar una generalización de una manera paramétrica ad-hoc para los diferentes problemas, aplicándola a algunos casos de uso.

### **1.2.2 Objetivos específicos**

1. Revisar y formular rigurosamente las medidas de dispersión ordinal encontradas.
2. Proponer propiedades de las medidas de dispersión y analizarlas en las medidas de dispersión presentadas.
3. Clasificar las medidas de dispersión presentadas basándose en sus propiedades y analizar la relación entre ellas.
4. Proponer una generalización de forma paramétrica que pueda ser calculada ad-hoc en función del problema planteado.
5. Analizar las propiedades para esta generalización y su relación con las medidas de dispersión presentadas.
6. Cuantificar el impacto del uso de etiquetas lingüísticas o frecuentistas para demostrar la necesidad de modelar la no equidistancia entre las categorías de una escala ordinal.
7. Cuantificar la dispersión ordinal de los pesos asociados a operadores OWA para su uso adecuado en problemas de decisión multicriterio.

## **1.3 Metodología**

Para el cumplimiento de los objetivos planteados, hemos seguido la siguiente metodología:

- Para la revisión y formulación rigurosa de las medidas de dispersión ordinal encontradas hasta la fecha hemos tenido que introducir algunos conceptos básicos particulares de la problemática tratada. Por ejemplo ha sido importante diferenciar entre la escala ordinal y los órdenes de una escala ordinal que la mayoría de los autores no distinguen (Tastle y Wierman, 2007). En esta tesis, formularemos las medidas de los autores encontrados de una forma más rigurosa matemáticamente y propondremos además formulaciones alternativas con salida en el espacio de los vectores de frecuencias relativas.
- Una vez revisadas las medidas existentes, analizaremos las propiedades planteadas hasta la fecha, las formularemos de una forma rigurosa y propondremos nuevas propiedades que consideramos relevantes para las medidas de dispersión ordinal, analizando además cada propiedad en todas las medidas encontradas.
- Para clasificar y establecer la relación entre las medidas presentadas hemos definido la relación de equivalencia entre las medidas, siendo dos medidas equivalentes si y sólo si ordenan de forma similar cualquier par de variables estadísticas ordinales.
- Propondremos después una generalización de las medidas de dispersión desde dos enfoques conceptuales, recogidos en una formulación analítica muy similar. De una profunda revisión bibliográfica (Leik, 1966; Berry y Mielke, 1992; Kvalseth, 1995; Blair y Lacy, 1996, 2000; Tastle y Wierman, 2007) acerca de las medidas que representan la variabilidad en la literatura, deducimos estos dos enfoques conceptuales de las medidas de dispersión de variables ordinales. Por un lado se encuentran medidas basadas en los productos de las frecuencias de las categorías analizadas dos a dos y ponderadas con alguna medida por las distancias entre ellas. Estas son las medidas de Berry y Mielke (1992), Kvalseth (1995) o de Blair y Lacy (1996, 2000). Por otro lado, se tienen medidas más similares a la varianza de los datos cuantitativos en las que se calcula el promedio de distancias



a un punto de referencia ponderadas por un peso, tales como el disenso de Tastle y Wierman (2007). Para estas últimas entra en juego el valor de referencia a utilizar por lo que en la sección de conceptos básicos y notación (2.1) presentaremos y analizaremos las diferentes opciones posibles en el contexto de variables ordinales.

- Para ambos enfoques utilizaremos una matriz de diferencias, que requiere ser estudiada en profundidad tanto en su interpretación como en las propiedades que debe de cumplir. Presentaremos además una propuesta de cálculo semi-automático en función de un vector.
- Tal y como se afirma en Franceschini y Romano (1999), Franceschini *et al.* (2004) o en García-Lapresta y Pérez-Román (2015), suponer equidistancia entre las etiquetas lingüísticas no es correcto y puede llevar a resultados inadecuados. Como primer caso de uso de la generalización de la medida de dispersión propuesta, aplicaremos la medida al experimento original motivador de esta memoria cuyo objetivo es demostrar la no necesaria equidistancia entre las categorías de una escala ordinal de Likert. Se utilizarán las medidas propuestas en el análisis del impacto de la naturaleza de las etiquetas (lingüísticas vs. frecuentistas) en la interpretación de la escala de Likert.
- Finalmente expondremos un segundo caso de uso en un contexto muy distinto en el que se utilizarán las medidas de dispersión ordinal propuestas en la determinación de los pesos en operadores de agregación OWA (Yager, 1988) (para un nivel de orness fijo) en problemas de decisión multicriterio.

## **1.4 Estructura**

Esta memoria está estructurada de la siguiente manera: en el capítulo 2 comenzamos introduciendo algunos conceptos básicos y notación. A continuación estudiamos la bibliografía hasta la fecha y analizamos las medidas cuantitativas de dispersión ordinal más relevantes y utilizadas. En

algunas de ellas introducimos, para una mejor comprensión, la medida nominal previa al desarrollo de la medida ordinal.

En el capítulo 3 recogemos algunas propiedades de las funciones de dispersión para variables ordinales y proponemos nuevas propiedades. Además, realizamos un novedoso análisis de todas las propiedades (las existentes y las propiedades nuevas propuestas en esta memoria) para cada una de las medidas encontradas hasta el momento.

En el capítulo 4 proponemos dos generalizaciones de las medidas de dispersión para variables ordinales presentando su interpretación y estudiamos en profundidad la relación con las medidas existentes. En el capítulo 5 analizamos en detalle la matriz de diferencias con la que trabajamos en las generalizaciones de las medidas de dispersión ordinal y las hipótesis que ha de cumplir. También proponemos un cálculo semi-automático de la matriz y llevamos a cabo el análisis de las propiedades presentadas en el capítulo 3.

En los capítulos 6 y 7 hemos seleccionado dos escenarios de aplicación de las medidas propuestas. En el capítulo 6 mostramos un experimento en el que se analiza el impacto de la naturaleza de las etiquetas en la construcción de un cuestionario con escalas de Likert para estudiar la distancia entre las etiquetas de esta escala ordinal. Utilizamos además de las nuevas medidas de dispersión ordinal propuestas para el análisis de los resultados obtenidos en este experimento. En el capítulo 7 mostramos uno de los muchos casos en los que se utiliza la entropía, propia de variables nominales, y proponemos una nueva forma de calcular los pesos de los operadores OWA utilizando la generalización de la medida de dispersión ordinal en lugar de la entropía.

Finalmente en el capítulo 8 resumimos las conclusiones y las futuras líneas de investigación que abre esta memoria.



## 2 Medidas de dispersión en variables ordinales

Como se ha podido ver en el capítulo introductorio existen diferentes enfoques y medidas para representar la dispersión en variables ordinales. En este capítulo se revisará el estado del arte de las diferentes medidas de dispersión encontradas en la literatura.

### 2.1 Conceptos básicos y notación

Antes de presentar las diferentes medidas que se han encontrado en la literatura para medir la variabilidad en variables de naturaleza ordinal, se introducen ciertos conceptos y notación que resultarán necesarios en esta memoria.

#### **Definición 2.1 Variable estadística**

Una variable estadística es cada una de las características o cualidades que poseen los individuos de una población y toma valores que pueden ser medidos u observados.

#### **Definición 2.2 Variable estadística cualitativa (ordinal y nominal)**

Una variable estadística cualitativa es una variable estadística que presenta modalidades no numéricas. Cuando estas modalidades no numéricas admiten un criterio de orden, se dice que es una variable estadística (cualitativa) ordinal y cuando no presentan un orden se tratará de una variable estadística (cualitativa) nominal.

#### **Definición 2.3 Escala y órdenes de la escala de una variable estadística ordinal**

Dada una variable estadística ordinal  $X$ , denotaremos por  $A_X = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  a la escala o conjunto de las  $k$  categorías ordenadas en las que toma valor.

Sin pérdida de generalidad se puede establecer una relación directa entre los elementos ordenados del conjunto  $A_X$  y el conjunto  $L_X = \{1, 2, \dots, k\}$  de órdenes de las categorías que conforman la escala. Conviene no obstante notar que

esta asignación numérica se refiere exclusivamente a la posición que ocupan en la escala de orden, no existiendo ninguna relación de distancia definida entre las categorías.

Como se verá a lo largo de este capítulo, la mayoría de los autores (Leik, 1966; Berry & Mielke, 1992; Kvalseth, 1995; Blair y Lacy, 2000; Tastle y Wierman, 2007) establecen directa o indirectamente la distancia entre las categorías como el valor absoluto entre los órdenes.

Para un mejor entendimiento, en adelante también podremos referirnos a  $L_X$  como el “conjunto de categorías” asociadas a la variable ordinal  $X$ , entendiéndose que nos referimos al vector de “órdenes de las categorías”.

Dada una variable estadística ordinal  $X$  con dominio  $L_X$ , denotaremos por  $n_i$  a la frecuencia de la categoría  $i$ -ésima y denotaremos por  $N$  al tamaño muestral ( $\sum_{i=1}^k n_i = N$ ). Denotaremos por  $f_i$  a la frecuencia relativa asociada a cada categoría ( $f_i = n_i/N$ ). Se tiene entonces el vector de frecuencias  $n = (n_1, n_2, \dots, n_k)$  y el de frecuencias relativas  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$ . Así, la variable estadística ordinal  $X$  queda caracterizada por los vectores  $n \in \mathbb{N}^k$  y  $\ell \in \mathbb{N}^k$  o equivalentemente  $f \in [0,1]^k$  y  $\ell \in \mathbb{N}^k$ .

**Notación:** En esta memoria notaremos  $\mathbb{N}^{k*}$  a los vectores  $n \in \mathbb{N}^k$  que cumplen

$$\sum_{i=1}^k n_i = N. \text{ De igual forma se notará } [0,1]^{k*} \text{ a los vectores } f \in [0,1]^k \text{ tales que}$$

$$\sum_{i=1}^k f_i = 1.$$

Tal y como se mencionó, el vector  $\ell$  hace referencia únicamente al orden de la categoría y los autores anteriormente citados establecen la distancia entre las categorías como la distancia entre los órdenes.

## **Observación 2.1**

En esta memoria se trabaja con variables estadísticas y no con variables aleatorias dado que por definición una variable aleatoria es una función

definida en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  cuya imagen está en el espacio real  $\mathbb{R}$ , y éste no es necesariamente el caso de las variables ordinales.

## Observación 2.2

Salvo que se explice lo contrario, cuando se haga referencia a dos vectores de frecuencias relativas  $f$  y  $g$  se supondrá sin pérdida de generalidad que son vectores asociados a dos variables estadísticas ordinales  $X$  e  $Y$  que toman valores en el mismo conjunto de categorías  $A$  o  $L$ .

Se tiene además el vector de la distribución de frecuencias relativas acumuladas  $F$  con:

$$F_i = \frac{1}{N} \sum_{j \leq i} n_j, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

### Ejemplo 2.1

Supongamos una variable estadística ordinal  $X$  que toma respuestas en una escala de Likert de 5 categorías  $Ax = \{ MD = \text{"Muy en Desacuerdo"} , D = \text{"Desacuerdo"} , N = \text{"Neutro"} , A = \text{"Acuerdo"} , MA = \text{"Muy de Acuerdo"} \}$ .  $X$  viene definida por los vectores  $n = (25, 40, 30, 5, 0)$  y  $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Se tiene entonces la Tabla 2.1:

<b>A</b> Conjunto de categorías $a_i$	<b>L</b> Categorías (i.e. Órdenes de las categorías) $l_i$	<b>N</b> Frecuencia $n_i$	<b>f</b> Frecuencia relativa $f_i$	<b>F</b> Frecuencia Acumulada $F_i$
<i>MD</i>	1	25	0.25	0.25
<i>D</i>	2	40	0.4	0.65
<i>N</i>	3	30	0.3	0.95
<i>A</i>	4	5	0.05	1
<i>MA</i>	5	0	0	1

100

1

Tabla 2.1 - Ejemplo de variable estadística ordinal (escalas y distribuciones)

### 2.1.1 Medidas de tendencia central en variables ordinales

Aunque esta memoria se centra en medidas de dispersión ordinal en esta sección se introducen medidas de tendencia central que se utilizan para construir algunas de las medidas presentadas.

#### Media aritmética

Algunos autores eligen la media aritmética como valor de referencia en medidas de dispersión ordinal (Tastle y Wierman, 2007). Conviene notar que en variables estadísticas ordinales las operaciones aritméticas como la suma o la división, entre otras, no están permitidas por lo que esta medida de referencia no es recomendable en el contexto de variables ordinales.

#### Moda

La moda es un valor de tendencia central muy intuitivo y gráfico que sí puede ser utilizado en variables estadísticas ordinales. Existen muchas situaciones en las que la moda sería una medida de tendencia central representativa de la población. Por ejemplo, en unas elecciones en las que el voto mayoritario es el ganador, la moda sería la medida de referencia más adecuada.

La moda presenta dos inconvenientes:

- Unicidad: como es sabido, la moda muestral no tiene por qué ser única.
- Robustez: La medida de dispersión tomando como valor de referencia la moda no es robusta ya que la moda depende fuertemente de la muestra. Esto quiere decir que pequeñas variaciones en la muestra pueden cambiar la categoría de referencia de forma radical lo que puede implicar grandes cambios en los valores que toma la medida de dispersión para vectores muy similares.

#### Mediana única (*Med<sub>u</sub>*)

Por un lado, nótese que la mediana en variables aleatorias discretas no es necesariamente única y por consiguiente el estadístico mediana en variables estadísticas tampoco lo es.

Por otro lado, nótese también que en variables estadísticas ordinales las operaciones aritméticas como la suma, la multiplicación por un escalar, entre otras, no están permitidas.

Por estos motivos, en esta sección se presentará una adaptación de la mediana, que llamaremos mediana única ( $Med_u$ ), para variables estadísticas de esta naturaleza que consiste en tomar como valor central la primera categoría que supera la mitad de la muestra al acumular su valor y el de categorías inferiores.

#### **Definición 2.4 – Mediana única de una variable estadística ordinal ( $Med_u$ )**

Dada  $X$  variable estadística ordinal que toma valores en el conjunto de categorías  $A_X = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  o de forma equivalente en el conjunto de órdenes de las categorías  $L_X = \{1, 2, \dots, k\}$ . Sea  $F = (F_1, F_2, \dots, 1)$  el vector de frecuencias acumuladas. Se define la mediana única de  $X$  como  $Med_u(X) = \min \{j \text{ con } j \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } F_j > 1/2 \text{ y } F_i \leq 1/2 \ \forall i < j\}$ .

#### Ejemplo 2.2:

Dada una variable estadística con 5 categorías, la mediana del vector  $f = (1/2, 0, 0, 0, 1/2)$  sería 1, 2, 3, 4 y 5 ya que todas las categorías dejan la mitad de la muestra por debajo y la otra mitad por encima. Nótese que el vector de frecuencias acumuladas sería  $F = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1)$ .

En cambio, se tiene que  $Med_u(f) = 5$ , ya que es la primera categoría que deja más de la mitad de la muestra por debajo de ella.

#### **D medida de dispersión ordinal**

No existe una definición formal universalmente aceptada sobre qué es y qué propiedades debe satisfacer una medida de dispersión ordinal. De manera muy general podemos decir que se trata de una función no negativa que toma el valor 0 en ausencia de dispersión y refleja la variabilidad de la distribución de la variable estadística ordinal.



En esta memoria denotaremos por medida de dispersión ordinal a funciones que reflejan lo anterior y que se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D: \mathbb{N}^{k*} \times \mathbb{N}^k &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (n, \ell) &\rightarrow D(n, \ell). \end{aligned} \quad (F1)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} D: [0,1]^{k*} \times \mathbb{N}^k &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (f, \ell) &\rightarrow D(f, \ell). \end{aligned} \quad (F2)$$

Para un conjunto de categorías  $L$  fijo (con  $k$  categorías  $k \in \mathbb{N}$  y  $k > 1$ ) y un tamaño muestral  $N$  dado, toda función de dispersión podría expresarse sin pérdida de generalidad en términos del vector de frecuencias absolutas como:

$$\begin{aligned} D_L: \mathbb{N}^{k*} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ n &\rightarrow D_L(n) = D(n, L). \end{aligned} \quad (F3)$$

Equivalentemente puede expresarse en términos del vector de frecuencias relativas:

$$\begin{aligned} D_L: [0, 1]^{k*} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ f &\rightarrow D_L(f) = D(f, L). \end{aligned} \quad (F4)$$

Una vez introducida la notación pertinente, se analizarán en detalle las medidas de dispersión más relevantes y comúnmente utilizadas en la literatura. Para más detalles, sobre las principales medidas existentes, ver los artículos de revisión general de Gadrich y Bashkansky (2012), Gadrich *et al.* (2015).

En concreto, se analizarán en detalle la medida LOV o variación ordinal de Leik (1966), el IOV o índice de variación ordinal de Berry y Mielke (1992), el COV o coeficiente de variación ordinal de Kvalseth (1995), la medida  $(1-\rho^2)$  o medida de dispersión de Blair y Lacy (1996, 2000), el Dsn o disenso de Tastle y Wierman (2007) y la medida  $H$  o entropía muestral de Shannon (1948).

Adicionalmente, incluimos una sección con autores que han trabajado sobre medidas de dispersión ordinal no cuantitativas (Franceschini y Romano, 1999; Franceschini *et al.*, 2004 o García-Lapresta y Borge, 2018).

## 2.2 Variación Ordinal de Leik (LOV) - Leik (1966)

La primera medida con cierto impacto que trata de cuantificar la dispersión o heterogeneidad de una variable ordinal se debe a Leik en 1966. En este trabajo, Leik presenta una medida de consenso ordinal basada en la dispersión de las respuestas. Para ello define previamente la medida de variación ordinal de Leik (Leik's ordinal variation, LOV).

Sea la función  $d$ :

$$\begin{aligned} d: \quad \mathbb{N}^{k*} &\rightarrow [0, 1]^k \\ n &\rightarrow d(n) = (d_1(n), d_2(n), \dots, d_k(n)), \\ \text{con } d_i(n) &= \begin{cases} F_i & \text{si } F_i \leq 1/2, \\ 1 - F_i & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nótese que en el caso particular en el que toda la muestra esté en la misma categoría  $j$ , se tiene que  $F_i = 0 \ \forall i < j$  y  $F_i = 1 \ \forall i \geq j \Rightarrow d_i = 0 \ \forall i$ . Además, se cumple que  $\forall n \in \mathbb{N}^{k*} \ d_i(n) \leq 1/2 \ \forall i$ .

### Definición 2.5 Variación ordinal de Leik (Leik, 1966) - LOV:

Dado un vector de frecuencias  $n \in \mathbb{N}^{k*}$  de una variable estadística ordinal  $X$  se define la medida de variación ordinal LOV como:

$$\begin{aligned} LOV: \quad \mathbb{N}^{k*} &\rightarrow [0, 1] \\ n &\rightarrow LOV(n) = \frac{\sum_{i=1}^k d_i(n)}{\text{Max}_{m \in \mathbb{N}^{k*}} \sum_{i=1}^k d_i(m)}. \end{aligned}$$

Para calcular el denominador, hay que tener en cuenta que el caso de dispersión máxima es aquél en el que la mitad de la muestra está en la primera categoría y la otra mitad en la última,  $n = (N/2, 0, \dots, 0, N/2)$ . Se tiene entonces  $d = (1/2, 1/2, \dots, 1/2, 0)$ , es decir, se tiene siempre el valor  $d_i = F_i = 1/2$  para las  $k-1$  primeras categorías y 0 para la categoría  $k$ -ésima por lo que  $\sum d_i(n) = (1/2)(k-1)$ . Entonces:

$$LOV(n) = \frac{\sum_{i=1}^k d_i(n)}{\max_{m \in N^{k*}} \sum_{i=1}^k d_i(m)} = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^k d_i(n).$$

Obsérvese que esta medida de dispersión no depende del tamaño muestral ni de la distancia entre categorías. Lo único que se utiliza en su fórmula es el orden, no depende de las etiquetas.

La medida propuesta por Leik representa la dispersión o heterogeneidad de una variable estadística ordinal. Como concepto antagónico y basándose en esta medida, Leik también propone la idea de consenso ordinal de una variable estadística ordinal. El consenso máximo se da cuando todos los miembros de un grupo eligen la misma respuesta de entre un conjunto de alternativas, habiendo por tanto dispersión cero en el vector de respuestas. Leik define entonces el consenso ordinal como:

$$\text{Consenso Ordinal } (n) = 1 - LOV(n).$$

### Observación 2.3

Sea  $f \in [0,1]^{k*}$  un vector de frecuencias relativas, entonces, el LOV puede ser definido análogamente de la siguiente manera:

$$LOV: [0, 1]^{k*} \rightarrow [0, 1]$$

$$f \rightarrow LOV(f) = \frac{\sum_{i=1}^k d_i(f)}{\max_{g \in [0,1]^{k*}} \sum_{i=1}^k d_i(g)} = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^k d_i(f),$$

y teniendo en cuenta que  $F_i = \sum_{r=1}^i f_r$  se puede expresar todo en términos de frecuencias relativas:

$$d: \begin{array}{ccc} [0, 1]^{k*} & \rightarrow & [0, 1] \\ f & \rightarrow & d(f), \end{array}$$

$$\text{con } d_i(f) = \begin{cases} \sum_{r=1}^i f_r & \text{si } \sum_{r=1}^i f_r \leq 1/2, \\ 1 - \sum_{r=1}^i f_r & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

### Ejemplo 2.3:

Calculando la de variación ordinal de Leik para la variable estadística  $X$  del ejemplo inicial (Ejemplo 2.1) con vector de frecuencias  $n = (25, 40, 30, 5, 0)$ , se tiene el vector de frecuencias acumuladas  $F = (0.25, 0.65, 0.95, 1, 0)$  y por tanto  $d = (0.25, 0.35, 0.05, 0, 0)$ . Se obtiene entonces  $LOV(n) = 0.33$  y  $Consenso\ Ordinal(n) = 0.67$ .

## **2.3 Índice de variación ordinal (IOV) - Berry y Mielke (1992)**

En su artículo, Berry y Mielke (1992) corrigen y extienden el índice de variación cualitativa (IQV), medida de variación para variables nominales presentado por Mueller, Schuessler y Costner (1977), para definir una medida de variación para categorías ordenadas.

Para una mejor comprensión del Índice de Variación Ordinal (IOV) de Berry y Mielke se presentará previamente el índice de variación cualitativa IQV:

### **Definición 2.6 Índice de variación cualitativa (Mueller, Schuessler y Costner, 1977) - IQV:**

Dado un vector de frecuencias  $n \in \mathbb{N}^{k*}$  de una variable estadística nominal  $X$  se define el índice de variación cualitativa IQV como:

$IQV: \mathbb{N}^{k*} \rightarrow [0, 1]$

$$n \rightarrow IQV(n) = \frac{U(n)}{U_{\max}} = \frac{\sum_{i < j} n_i n_j}{\max_{m \in \mathbb{N}^{k*}} \sum_{i < j} m_i m_j}, \text{ con } 1 \leq i, j \leq k.$$

El valor mínimo de este índice es 0 y se obtiene cuando todos los elementos se encuentran en la misma categoría, i.e.  $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $n_i = N$  y  $n_j = 0 \forall j \neq i$ .

El máximo valor se alcanza inicialmente cuando los elementos se reparten por igual entre las  $k$  categorías, i.e.  $n_i = N/k \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ :

$$U_{\max} = \binom{k}{2} \left( \frac{N}{k} \right)^2 = \frac{(k-1)N^2}{2k}.$$

El IQV puede entonces expresarse de la siguiente manera:

$$IQV(n) = \frac{\sum_{i < j} n_i n_j}{\max_{m \in \mathbb{N}^{k*}} \sum_{i < j} m_i m_j} = \frac{2k \sum_{i < j} n_i n_j}{(k-1)N^2}, \text{ con } 1 \leq i, j \leq k.$$

El problema de esta medida es que su valor máximo depende del tamaño muestral  $N$  y que cuando  $N$  no es múltiplo del número de categorías  $k$ , el vector de máxima dispersión nunca podría ser alcanzado (pues requeriría tener al menos una componente no entera) y por tanto el IQV no llegaría a tomar el valor 1.

Berry y Mielke dan una corrección del denominador en este caso:

- Si  $N$  no es múltiplo de  $k$  entonces existen  $a$  y  $b \in \mathbb{N}$  tales que  $N = a*k + b$ , con  $0 < b < k$ .

El vector de dispersión máxima en este caso tomará valores  $(a+1)$  para  $b$  componentes y  $a$  para las restantes  $(k-b)$  componentes por lo que puede escribirse como:

$$U_{\max} = \max_{m \in \mathbb{N}^{k*}} \sum_{i < j}^k m_i m_j = \binom{b}{2} (a+1)^2 + \binom{k-b}{2} a^2 + b(k-b)a(a+1).$$

- Nótese que esta expresión es extensible al caso en el que  $N$  es múltiplo de  $k$ , ya que de ser así se tiene que  $b = 0$  y el denominador coincide con el dado inicialmente.

#### Observación 2.4

Aunque en la Definición 2.6 se exige que la variable sea de carácter nominal, el IQV podría calcularse para cualquier tipo de variable estadística.

#### Definición 2.7 Índice corregido de variación cualitativa (Berry y Mielke, 1992) - IQV\_corregido:

Dado un vector de frecuencias  $n \in \mathbb{N}^k$  de una variable estadística nominal  $X$  se define el índice de variación cualitativa IQV corregido como:

$$IQV\_corregido(n) = \frac{\sum_{i < j} n_i n_j}{\max_{m \in \mathbb{N}^{k*}} \sum_{i < j} m_i m_j} = \frac{\sum_{i < j} n_i n_j}{\binom{b}{2} (a+1)^2 + \binom{k-b}{2} a^2 + b(k-b)a(a+1)},$$

donde  $a$  y  $b \in \mathbb{N}$  tales que  $N = a*k + b$  con  $0 \leq b < k$  y  $1 \leq i, j \leq k$ .

Se cumple entonces que el valor máximo del IQV\_corregido es 1 independientemente de  $N$  y se tiene por tanto que  $0 \leq IQV\_corregido \leq 1$ .

Obsérvese que las medidas anteriores son insensibles a permutaciones del vector de frecuencias  $n$  lo que indica claramente que se trata para variables estadísticas de naturaleza nominal. Por este motivo y aunque en principio podría usarse como medida de variación ordinal, no parece lo más deseable.

Para paliar esta deficiencia, los autores tratan de extender las ideas del IQV a un contexto donde el orden de las categorías tenga relevancia en la medida. Por este motivo, tomando esta medida como base, Berry y Mielke (1992) la amplían a variables ordinales teniendo en cuenta la diferencia en el orden de

cada uno de los sumandos del índice y definen el Índice de Variación Ordinal (IOV):

**Definición 2.8 Índice de variación ordinal (Berry y Mielke, 1992) - IOV:**

Dado un vector de frecuencias  $n \in \mathbb{N}^{k*}$  de una variable estadística ordinal  $X$  se define el índice de variación ordinal IOV como:

$$IOV: \mathbb{N}^{k*} \rightarrow [0, 1]$$

$$n \rightarrow IOV(n) = \frac{T(n)}{T_{\max}} = \frac{\sum_{i < j} n_i n_j (j - i)}{\max_{m \in \mathbb{N}^{k*}} \sum_{i < j} m_i m_j (j - i)}, \text{ con } 1 \leq i, j \leq k.$$

El IOV toma su valor mínimo 0 cuando todos los elementos se encuentren en una categoría, i.e.,  $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$  tal que  $n_i = N$  y  $n_j = 0 \forall j \neq i$ .

Para calcular el valor máximo de IOV hay que analizar la variación máxima. En este caso de variables ordinales, ésta se alcanzará cuando se tenga la mitad de la muestra en cada extremo. Al igual que para el IQV, este valor depende de la relación entre  $N$  y  $k$ , concretamente de si  $N$  es par o impar.

- Si  $N$  es par, se tiene el vector de dispersión máxima  $(N/2, \dots, N/2)$  con lo que:

$$T_{\max} = \max_{m \in \mathbb{N}^k} \sum_{i < j}^k m_i m_j (j - i) = \left(\frac{N}{2}\right)^2 (k - 1).$$

- Si  $N$  es impar, no se puede distribuir la muestra por igual en los dos extremos. La situación más similar a tener la muestra dividida por igual en las dos categorías extremas cuando el tamaño muestral  $N$  es impar presenta 3 casos diferentes:

1. La última categoría tiene un elemento más que la primera:

$$n_1 = (N-1)/2, n_k = (N+1)/2 \text{ y } n_i = 0 \forall i \in \{2, \dots, k-1\}.$$

2. La primera categoría tiene un elemento más que la última:  
 $n_1 = (N+1)/2$ ,  $n_k = (N-1)/2$  y  $n_i = 0 \ \forall i \in \{2, \dots, k-1\}$ .
3. Ambas categorías extremas tienen la misma muestra y existe alguna categoría no extrema que tiene un elemento:  
 $n_1 = n_k = (N-1)/2$ ,  $\exists j \in \{2, \dots, k-1\}$  tal que  $n_j = 1$  y  $n_i = 0 \ \forall i \neq \{1, j, k\}$ .

En cualquiera de estas situaciones el máximo se alcanza en:

$$T_{\max} = \max_{m \in \mathbb{N}^k} \sum_{i < j}^k m_i m_j (j - i) = \frac{(N^2 - 1)}{4} (k - 1).$$

Así pues, el valor máximo del IOV es 1 y se tiene  $0 \leq \text{IOV} \leq 1$ .

Tomando los cálculos anteriores, el IOV se define por tanto como:

$$\text{IOV}: \mathbb{N}^{k*} \rightarrow [0, 1]$$

$$n \rightarrow \text{IOV}(n) = \begin{cases} \frac{\sum_{i < j} n_i n_j (j - i)}{\left(\frac{N^2}{4}\right)(k - 1)} & \text{si } N \text{ par,} \\ \frac{\sum_{i < j} n_i n_j (j - i)}{\left(\frac{N^2 - 1}{4}\right)(k - 1)} & \text{si } N \text{ impar,} \end{cases}$$

*con  $1 \leq i, j \leq k$ .*

#### Ejemplo 2.4:

Calculando el índice de variación ordinal de Berry y Mielke (1992) para la variable estadística  $X$  del ejemplo inicial (Ejemplo 2.1) con vector de frecuencias  $n = (25, 40, 30, 5, 0)$ , se tiene que  $\text{IOV}(n) = 0.46$ .



### Observación 2.5

Sea  $f \in [0,1]^{k*}$  un vector de frecuencias relativas, entonces, el IOV puede ser definido análogamente de la siguiente manera:

$$IOV: [0, 1]^{k*} \rightarrow [0, 1]$$

$$f \rightarrow IOV(f) = \frac{T(f)}{T_{\max}} = \frac{\sum_{i < j} f_i f_j (j-i)}{\max_{g \in [0,1]^{k*}} \sum_{i < j} g_i g_j (j-i)}, \text{ con } 1 \leq i, j \leq k.$$

Se tiene por tanto:

$$IOV: [0, 1]^{k*} \rightarrow [0, 1]$$

$$f \rightarrow IOV(f) = \begin{cases} \frac{4}{k-1} \sum_{i < j} f_i f_j (j-i) & \text{si } N \text{ par,} \\ \frac{4}{(k-1)(N^2-1)} \sum_{i < j} f_i f_j (j-i) & \text{si } N \text{ impar,} \end{cases}$$

$\text{con } 1 \leq i, j \leq k.$

### Observación 2.6

En este trabajo nos referiremos al término de "ordinal variation" (variación ordinal) según Berry y Mielke (1992) y denotaremos como  $OV(f)$  al índice de variación ordinal IOV sin normalizar. Obsérvese que  $OV(f)$  representa el salto medio.

## 2.4 Coeficiente de Variación Ordinal (COV) - Kvalseth (1995)

Kvalseth detecta algunos problemas en las medidas de variación nominal y ordinal presentadas por Berry y Mielke en 1992, y propone por tanto dos nuevas medidas de dispersión para variables categóricas, una para variables nominales y otra para variables ordinales.

Para variables nominales, comienza rechazando la idea de Berry y Mielke de normalizar el IQV a 1 independientemente del valor de  $N$  (múltiplo o no del número de categorías  $k$ ). Es decir, rechaza el IQV\_corregido presentado por Berry y Mielke (ver Definición 2.7). Argumenta que en esta nueva propuesta se pierde la propiedad de invarianza, i.e.  $\text{IQV}(n) = \text{IQV}(c*n) \forall c \in \mathbb{R}^+$  (ver Definición 3.2) y que además añade complejidad algorítmica. El autor pone como ejemplo los vectores  $n_1 = (2,3)$  y  $n_2 = (4,6)$  pero trabaja con los vectores de frecuencias relativas  $f_1 = (2/5, 3/5)$  y  $f_2 = (4/10, 6/10)$  para decir que  $\text{IQV}(f_1) = \text{IQV}(f_2)$  pero es fácil ver que  $\text{IQV\_corregido}(f_1) \neq \text{IQV\_corregido}(f_2)$ . Kvalseth justifica que normalizar es innecesario mostrando una serie de ejemplos que funcionan de forma razonable entre 0 y 1 con el IQV no normalizado.

Kvalseth trabaja el IQV aplicado a frecuencias relativas en lugar de al vector de frecuencias y evita así el problema de tener vectores muestrales con componentes no enteras.

$$\text{IQV}: [0, 1]^{k*} \rightarrow [0, 1]$$

$$f \rightarrow \text{IQV}(f) = \frac{2k \sum_{i < j} f_i f_j}{(k-1)}, \text{ con } f_i = n_i/N \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

El autor plantea que existe un desvío al alza de esta medida para valores intermedios. Por ejemplo, dada que una muestra con  $f_{\min} = (1,0)$  tiene dispersión 0 y otra con  $f_{\max} = (0.5, 0.5)$  tiene dispersión 1. Sería de esperar que una distribución  $f = (0.75, 0.25)$  tuviese un valor de dispersión de alrededor del 0.5, puesto que ambas componentes están en el punto medio de la  $f_{\min}$  y  $f_{\max}$ . Sin embargo se tiene que  $\text{IQV}(0.75, 0.25) = 0.75$ .

Kvalseth define entonces el coeficiente de variación nominal (CNV) como medida más apropiada para recoger la variabilidad de datos nominales:

**Definición 2.9 Coeficiente de variación nominal (Kvalseth, 1995) - CNV:**

Dado un vector de frecuencias relativas  $f \in [0,1]^{k*}$  de una variable estadística nominal  $X$  se define el índice de variación nominal CNV como:

$$\begin{aligned} \text{CNV}: [0, 1]^{k*} &\rightarrow [0, 1] \\ f &\rightarrow \text{CNV}(f) = 1 - \sqrt{(1 - IQV(f))}. \end{aligned}$$

Para cualquier número de categorías  $k$  se cumple que  $0 \leq \text{CNV} \leq 1$ . Kvalseth menciona además en su artículo que parece existir una relación lineal entre el CNV y la desviación muestral.

Para las medidas ordinales, Kvalseth inicialmente trabajó con una medida muy similar al IOV de Berry y Mielke aplicado de nuevo a frecuencias relativas llamada índice de variación ordinal:

$$\begin{aligned} \Delta^*: [0, 1]^{k*} &\rightarrow [0, 1] \\ f &\rightarrow \Delta^*(f) = \frac{\sum_{i < j} f_i f_j |i - j|}{\max_{g \in [0,1]^{k*}} \sum_{i < j} g_i g_j |i - j|} = \frac{4}{(k-1)} \sum_{i < j} f_i f_j |i - j|. \end{aligned}$$

Esta medida es igual a 0 cuando  $\exists i \in \{1, \dots, k\}$  con  $f_i = 1$  y  $f_j = 0 \ \forall j \neq i$ . El valor máximo lo toma cuando la distribución está polarizada, es decir,  $f_1 = f_k = 1/2$ , y  $f_j = 0 \ \forall j \in \{2, \dots, k-1\}$  y toma el valor  $(k-1)/4$  por lo que se tiene que  $0 \leq \Delta^* \leq 1$ .

De hecho, si  $N$  es par, esta medida coincide con el índice de variación ordinal de Berry y Mielke. Si  $N$  impar se cumple que  $\Delta^*(f) = (1 - (1/N^2)) \text{IOV}(n)$ .

No obstante, Kvalseth expone que esta medida muestra los mismos problemas de desvío al alza para valores intermedios que la medida para variables nominales y propone entonces una medida análoga, el coeficiente de variación ordinal (COV):

**Definición 2.10 Coeficiente de variación ordinal (Kvalseth, 1995) - COV:**

Dado un vector de frecuencias relativas  $f \in [0,1]^{k*}$  de una variable estadística ordinal  $X$  se define el índice de variación ordinal COV como:

$$\begin{aligned} \text{COV: } [0, 1]^{k*} &\rightarrow [0, 1] \\ f &\rightarrow \text{COV}(f) = 1 - \sqrt{1 - \Delta^*(f)}. \end{aligned}$$

Para cualquier número de categorías  $k$  se cumple que  $0 \leq \text{COV} \leq 1$ . No obstante, no alcanzará el valor 1 para valores de  $N$  impares y pequeños. El procedimiento computacional para calcular el COV es sencillo.

Ejemplo 2.5:

Calculando el coeficiente de variación ordinal para la variable estadística  $X$  del ejemplo inicial (Ejemplo 2.1) con vector de frecuencias  $n = (25, 40, 30, 5, 0)$  y vector de frecuencias relativas  $f = (0.25, 0.4, 0.3, 0.05, 0)$  se tiene que  $\Delta^*(f) = 0.46$  y por tanto  $\text{COV}(f) = 0.27$ .

**2.5 Medida de dispersión (1- $I^2$ ) - Blair y Lacy (1996, 2000)**

Estos autores son los primeros en la bibliografía estudiada que se refieren de forma concreta a la variabilidad de los datos como “medidas de dispersión”, y a su opuesto, la ausencia de dispersión, a las que llaman “medidas de concentración”. Inicialmente trabajan con medidas de concentración. Conviene notar que hoy en día el término “concentración” se asocia en Estadística a la concentración de un bien, como por ejemplo el valor que viene dado por el coeficiente de Gini y cualquiera de las formas alternativas de expresarlo (Gini, 1921; Giorgi, 1990; Yitzhaki, 1998). No obstante, Blair y Lacy se refieren a la concentración de los datos en una etiqueta como opuesto a la dispersión o variabilidad de los datos entre varias etiquetas.

Como se ha visto, tanto el IOV como el COV se basan en frecuencias ( $n$ ) o frecuencias relativas muestrales ( $f$ ), mientras que Leik desarrolló una medida basada en las frecuencias acumuladas ( $F$ ). Blair y Lacy toman las frecuencias

acumuladas como punto de partida para definir una nueva medida de dispersión que unifica las medidas anteriores.

Dada una variable estadística ordinal  $X$  con  $k$  categorías, Blair y Lacy (1996, 2000) trabajan con las  $(k-1)$  componentes del vector de frecuencias acumuladas (ya que  $F_k = 1$  siempre). A continuación modelizan este vector de  $k-1$  coordenadas como un punto  $S$  en  $\mathbb{R}^{k-1}$ .

Una vez transformada la variable ordinal en un punto  $S$  en  $\mathbb{R}^{k-1}$ , cuantifican la ausencia de variabilidad de una variable estadística ordinal (formalmente utilizan el nombre de concentración como opuesto al de dispersión), como la distancia euclídea cuadrática del punto  $S$  a un punto  $C$  de coordenadas  $(1/2, 1/2, \dots, 1/2)$ . El punto  $C$  refleja la función de distribución de frecuencias acumuladas que se correspondería con un vector de frecuencias polarizado, es decir, de dispersión máxima.

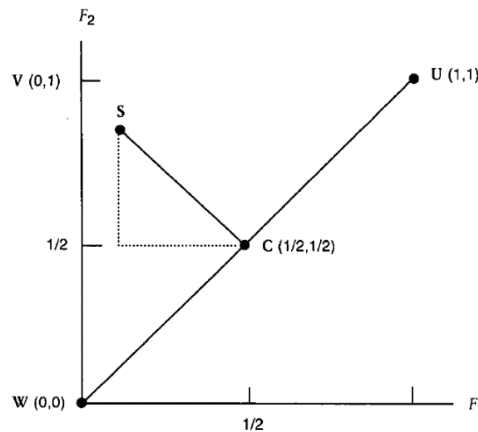


Figura 2.1 –Representación geométrica de la medida de Blair y Lacy si  $N$  par y  $k=3$  (Blair y Lacy, 1996)

En esta sección se analizará por simplicidad el caso  $N$  par (para más detalles sobre el análisis del caso impar ver Figura 2.2 y Blair y Lacy, 1996). Se tiene por tanto la medida  $d^2$ :

$$d^2: [0, 1]^{k-1} \rightarrow [0, 1]$$

$$S = (F_1, \dots, F_{k-1}) \rightarrow d^2(S) = \sum_{i=1}^{k-1} (F_i - 1/2)^2.$$

La siguiente imagen muestra la razón de la complejidad en el cálculo si  $N$  impar, ya que en este caso, el punto  $C$  no es único. Por ejemplo, si se tienen tres categorías ( $k = 3$ ), el punto  $C$  no se alcanza y existen dos puntos de dispersión máxima:  $Q = ((1/2)-(1/2N), (1/2)-(1/2N))$  y  $R = ((1/2)+(1/2N), (1/2)+(1/2N))$ .

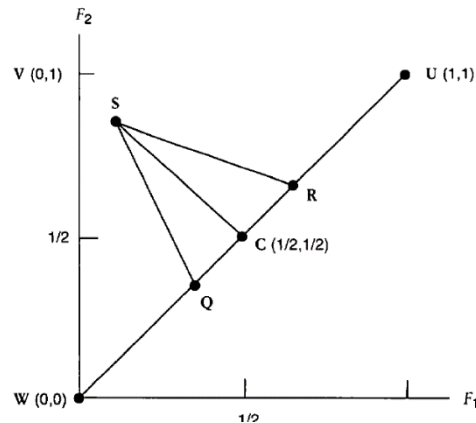


Figura 2.2 –Representación geométrica de la medida de Blair y Lacy si  $N$  impar y  $k=3$  (Blair y Lacy, 1996)

La razón de tomar como referencia en esta medida el punto de dispersión máxima se debe su unicidad, cuando  $N$  es par. Para una variable ordinal con  $k$  opciones de respuesta, existen  $k$  puntos de dispersión mínima (aquellos que concentran la muestra en cada una de las categorías) y sólo uno de dispersión máxima por lo que se toma éste como referencia.

A continuación los autores normalizan esta medida  $d^2$  dividiendo entre el máximo y se tiene la medida de concentración de datos:

**Definición 2.11 Medida de concentración (Blair y Lacy, 2000) -  $I^2$  :**

Dada una variable estadística ordinal  $X$  con  $k$  categorías, sea  $S = (F_1, \dots, F_{k-1})$  el vector de las  $(k-1)$  frecuencias acumuladas ( $F_1 \leq F_2 \leq \dots \leq F_{k-1} \leq 1 = F_k$ ), se define la medida de concentración de datos de Blair y Lacy  $I^2$  como:

$$I^2: [0, 1]^{k-1} \rightarrow [0, 1]$$

$$S = (F_1, \dots, F_{k-1}) \rightarrow I^2(S) = \frac{d^2(S)}{d_{\max}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} (F_i - 1/2)^2}{\underset{\substack{G \in [0,1]^{k-1} \\ G_1 \leq \dots \leq G_{k-1} \leq 1}}{\text{Max}} \sum_{i=1}^{k-1} (G_i - 1/2)^2}.$$

La distancia máxima al vector de dispersión polar (cuyo punto de distribuciones acumuladas sería  $C = (1/2, \dots, 1/2)$ ) se alcanza en cualquiera de los  $k$  puntos de dispersión mínima (aquellos que concentran la totalidad de la muestra en cada una de las categorías) por lo que  $d_{\max}^2 = (k-1)/4$  y por tanto:

$$I^2(S) = \frac{d^2(S)}{d_{\max}^2} = \frac{4 \sum_{i=1}^{k-1} (F_i - 1/2)^2}{(k-1)}.$$

Teniendo en cuenta que  $I^2$  toma el valor 0 cuando la dispersión es máxima y el valor 1 cuando los datos están concentrados en una categoría, los autores proponen como medida de dispersión  $1-I^2$ :

**Definición 2.12 Medida de dispersión (Blair y Lacy, 2000) -  $(1-I^2)$ :**

Dada una variable estadística ordinal  $X$  con  $k$  categorías, sea  $S = (F_1, \dots, F_{k-1})$  el vector de dimensión  $(k-1)$  de frecuencias acumuladas ( $F_k = 1$ ), se define la medida de dispersión de Blair y Lacy, que denotaremos como  $(1-I^2)$  a:

$$1-I^2: [0, 1]^{k-1} \rightarrow [0, 1]$$

$$S = (F_1, \dots, F_{k-1}) \rightarrow 1-I^2(S) = \frac{d_{\max}^2 - d^2(S)}{d_{\max}^2}.$$

**Ejemplo 2.6:**

Calculando la medida de Blair y Lacy para la variable estadística  $X$  del ejemplo inicial (Ejemplo 2.1) con vector de frecuencias  $n = (25, 40, 30, 5, 0)$  y vector de frecuencias relativas acumuladas  $F = (0.25, 0.65, 0.95, 1, 1)$  se tiene que el punto  $S$  en el espacio 4-dimensional viene dado por las coordenadas  $S = (0.25, 0.65, 0.95, 1)$  por lo que definiendo la distancia euclídea cuadrática

normalizada entre  $S$  y  $C$  (punto de dispersión máxima y coordenadas  $1/2$ ) se tiene que  $I^2(S) = 0.54$  y en términos de dispersión es  $1 - I^2 = 0.46$ .

### Observación 2.7

Sea  $f \in [0,1]^{k*}$  un vector de frecuencias relativas, y teniendo en cuenta que

$F_i = \sum_{r=1}^i f_r$ , entonces la medida de Blair y Lacy ( $I^2$ ) puede ser definida

análogamente de la siguiente manera:

$$I^2: [0, 1]^{k*} \rightarrow [0, 1]$$

$$f \rightarrow I^2(f) = \frac{4 \sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{r=1}^i f_r - 1/2 \right)^2}{(k-1)}.$$

### Observación 2.8

Blair y Lacy (2000) establecen la relación entre las medidas de concentración  $I^2$ ,  $I$  y las medidas de dispersión existentes hasta ese momento:

- La variación ordinal de Leik (LOV) puede expresarse geométricamente como la distancia de Manhattan entre la distribución observada y el punto de dispersión máxima  $F_{max}$ . Para ello basta con expresar  $d_i = 1/2 -$

$|F_i - 1/2|$  y definir  $B = \sum_{i=1}^{k-1} |F_i - 1/2|$  y  $B_{max} = (k-1)/2$ . Se tiene entonces

que  $LOV = 1 - B/B_{max}$ .

Es decir, LOV difiere de  $I$  y  $I^2$  en que es una medida de dispersión en lugar de una medida de concentración y en que utiliza la distancia de Manhattan en lugar de la euclídea.

- Blair y Lacy (2000) demuestran que la única diferencia con el índice de variación ordinal de Berry y Mielke es que es una medida de dispersión y se expresa por tanto como el complementario de la medida  $I^2$ :  $IOV = 1 - I^2$ .



- Finalmente, dado que el coeficiente de variación de Kvalseth cuando  $N$  es par cumple que  $COV = 1 - \sqrt{1 - IOV}$  se tiene que  $COV = 1 - I$ . Así  $COV$  es el complemento de la distancia euclídea normalizada de la distribución acumulada observada a la distribución máxima.

Por tanto la medida de Blair y Lacy ( $1 - I^2$ ) no se trata en realidad de ninguna nueva medida sino que es un aglutinador de medidas que recoge las anteriores.

### Observación 2.9

Existen otros autores (Gadrich *et al.*, 2015) que proponen también una generalización de dos de las medidas fundamentales (LOV e IOV) basándose en una medida de distancia entre las categorías. Formalmente, dado un vector de frecuencias relativas  $f \in [0,1]^{k*}$  de una variable estadística ordinal  $X$  con  $k$  categorías en una escala ordinal  $A_X$  y sea  $L(a_i, a_j)$  una función definida de  $A_X \times A_X$  en  $\mathbb{R}$  no negativa, simétrica y tal que  $L(a_i, a_i) = 0 \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$  se define la variación total de  $f$  como:  $V_T(f) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k L(a_i, a_j) f_i f_j$ . Conviene notar

que  $V_T(f)$  coincide con  $OV(f)$  (ordinal variation, ver Observación 2.6) cuando se toma como medida  $L$  la distancia absoluta entre los órdenes de las etiquetas:  $L(a_i, a_j) = L(l_i, l_j) = |j - i|$ .

## 2.6 Consenso (Csn) y Disenso (Dsn) - Tastle y Wierman (2007)

Las medidas analizadas hasta este momento se basan en los productos de las frecuencias de las categorías analizadas dos a dos y ponderadas con alguna medida por las distancias entre ellas. El enfoque que proponen Tastle y Wierman (2007) con la medida que se presenta a continuación es distinta y recuerda a la varianza de los datos cuantitativos, ya que en ella se calcula algo similar al promedio de las distancias a un punto de referencia introduciendo un ponderador.

Entre los años 2005 a 2007 (Tastle y Wierman, 2005, 2006, 2007) estos autores desarrollan una nueva medida de dispersión cuando trabajan sobre el problema de la toma de decisiones en un grupo, lo que motiva el nombre que recibe (Tastle y Wierman, 2006). Construyen esta nueva medida de dispersión como la representación del consenso (acuerdo) y disenso (desacuerdo), expresándolas una como opuesta de la otra siguiendo la idea de Blair y Lacy (2000) de que ausencia total de dispersión en un conjunto de datos implica consenso absoluto.

El consenso se utiliza en varios contextos (Akiyama *et al.*, 2016; Elzinga, Wang, Lin y Kumar, 2011). Es una medida que puede entenderse en el entorno sociológico de consenso cultural como la opinión colectiva de un grupo, teniendo en cuenta que se aceptan grados de variación entre los individuos. Se encuentran dos grandes contextos de medición de consenso: el propuesto por estos autores, como el porcentaje de acuerdo, habitualmente en escalas de Likert con gradación entre las respuestas. Y también se mide habitualmente el consenso dentro de los modelos de relaciones de preferencia, es decir en la toma de decisiones multicriterio, etc.

Pero Tastle y Wierman (2007) lo definen como una medida matemática que permite determinar la dispersión entorno a un valor.

### **Definición 2.13 Consenso (Tastle y Wierman, 2007) - Csn:**

Dada una variable estadística ordinal  $R$  con  $k$  categorías  $A_R = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ , Tastle y Wierman recodifican esta variable ordinal a una variable discreta  $X$  con  $k$  categorías  $A_X = \{l_1, \dots, l_k\}$  con  $l_i \in \mathbb{R}$  y  $l_i < l_j \ \forall i < j$ <sup>1</sup>. Realizada esta recodificación, el consenso de Tastle y Wierman se define como:

---

<sup>1</sup> La definición original de Tastle y Wierman (2007) no viene formulada en estos términos. No obstante, se incluye esta definición de escala ordinal utilizada por otros autores (por ejemplo Kampen y Swyngedouw, 2000) para facilitar la comprensión.

$$Cns_{L,X}: [0, 1]^{k*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow Cns_{L,X}(f) = 1 + \sum_{i=1}^k f_i \log \left( 1 - \frac{|l_i - \mu_x|}{l_{\max} - l_{\min}} \right),$$

donde  $\mu_x(f)$  la media de  $X$  con  $\mu_x(f) = \sum_{i=1}^k f_i l_i$  y  $l_{\max} - l_{\min}$  es la distancia

máxima entre categorías (independientemente del tamaño muestral en esa categoría).

### **Definición 2.14 Disenso (Tastle y Wierman, 2007) - Dsn:**

El disenso es el opuesto al consenso, es decir:

$$Dsn_{L,X}(f) = 1 - Cns_{L,X}(f) = - \sum_{i=1}^k f_i \log_2 \left( 1 - \frac{|l_i - \mu_x|}{l_{\max} - l_{\min}} \right).$$

### **Observación 2.10**

Conviene notar que para poder computar el disenso de Tastle y Wierman es necesario conocer la codificación numérica que se hace de las categorías. Tastle y Wierman en ausencia de información consideran que  $Ax = Lx = \{1, \dots, k\}$  por lo que reescriben la fórmula anterior como:

$$Dsn_{L,X}(f) = - \sum_{i=1}^k f_i \log_2 \left( 1 - \frac{|i - \mu_x|}{k-1} \right), \text{ con } \mu_x(f) = \sum_{i=1}^k f_i i.$$

### **Ejemplo 2.7:**

Para la variable estadística  $X$  del ejemplo inicial (Ejemplo 2.1) con vector de frecuencias  $n = (25, 40, 30, 5, 0)$  y vector de frecuencias relativas  $f = (0.25, 0.40, 0.30, 0.05, 0)$  se tiene que  $\mu_x(f) = 2.15$ ,  $l_{\max} - l_{\min} = 4$  y por tanto  $Cns_{L,X}(f) = 0.71$  y  $Dsn_{L,X}(f) = 0.29$ .

### **Observación 2.11**

Nótese que la formulación de la medida de consenso de estos autores tiene cierto parecido con la Entropía de Shannon (ver 2.7).

## 2.7 Entropía muestral de Shannon (H) - Shannon (1948)

Debido a su importancia y a su habitual uso como medida de dispersión en escenarios de variables de naturaleza ordinal, se introduce en esta sección la Entropía muestral, definida por Shannon en 1948. No obstante, tal y como se explica en la Observación 2.12 y se ilustra en el Ejemplo 2.8, no se trata de la medida adecuada para reflejar la dispersión de una variable ordinal.

La entropía de una variable estadística discreta tiene su origen dentro del contexto de teoría de la información, para definir la cantidad media de información atribuible a un mensaje constituido por un conjunto de señales. La entropía constituye el grado de incertidumbre que se tiene ante la aparición de cada señal. Si la probabilidad es la misma para todos, la incertidumbre es máxima.

### Definición 2.15 Entropía muestral (Shannon, 1948) - H:

Dada la variable estadística ordinal  $X$ , el conjunto  $L$  de categorías ordenadas en el que la variable se define y sea el vector  $f = (f_1, \dots, f_k)$  de frecuencias relativas, se define la entropía de  $X$  mediante la siguiente función:

$$\begin{aligned} H_{X,L}: [0, 1]^{k*} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow H_{X,L}(f) = - \sum_{i=1}^k f_i \log_2(f_i). \end{aligned}$$

Nótese que, por convenio, si  $f_i = 0$  entonces  $f_i \log_2(f_i) = 0$ .

### Observación 2.12

Tal y como se verá en un análisis más exhaustivo en el capítulo 3 y tal y como ya adelantaban algunos autores (Tastle y Wierman, 2006, 2007), la entropía no es la medida de dispersión adecuada en el caso de variables ordinales ya que no es sensible a permutaciones de las componentes de un vector. Esto quiere decir que dos vectores de componentes idénticas, que difieran únicamente en la ordenación de éstas, tienen la misma entropía.

### Ejemplo 2.8:

Sean  $v_1 = (50, 0, 0, 0, 50)$  y  $v_2 = (50, 50, 0, 0, 0)$  los vectores de respuestas dadas a una variable  $X$  que toma respuestas en una escala de Likert de 5 categorías. De forma intuitiva puede apreciarse que la dispersión ordinal de  $v_1$  es extrema, mientras que la dispersión de  $v_2$  es mucho menor. No obstante, ambos vectores tienen la misma entropía de valor 2.

### **Observación 2.13**

Tal y como se ha mencionado, esta sección sobre la entropía de Shannon se ha incluido por su habitual uso como medida de dispersión en escenarios de variables de naturaleza ordinal. Además, la entropía es utilizada por Tastle y Wierman (2007) como base para construir su medida de dispersión ordinal. Existen otras medidas de dispersión nominal en la literatura que también han dado lugar a medidas de dispersión ordinal relevantes por lo que se han incluido en esta memoria (el IQV, ver Definición 2.6 y el CNV, ver Definición 2.9).

## **2.8 Medidas de dispersión ordinal no cuantitativas**

Algunos autores como Franceschini y Romano (1999), Franceschini *et al.* (2004) o García-Lapresta y Pérez-Román (2015) cuestionan la conversión numérica realizada al asignar números a las etiquetas lingüísticas de una escala ordinal ya que al hacerlo se le asignan propiedades que inicialmente no poseían.

Recalcan que no se pueden localizar en el eje de abscisas las etiquetas de una manera correcta, dado que no hay distancia relativa definida entre ellas.

Así, pueden encontrarse algunas medidas de dispersión no cuantitativas como son: el "rango de órdenes" (Franceschini y Romano, 1999), construido a partir de la familia de operadores OWA (Ordered Weight Averaging) (Yager, 1988) que utilizan únicamente operadores de mínimo y máximo sin necesidad de codificar con números las etiquetas de cada categoría o también la medida de "rango ordinal" (Franceschini *et al.* 2004) que es una evolución de la

medida anterior que establece la diferencia entre las categorías teniendo en cuenta además la posición de los niveles en la escala ordinal. También en esta línea, hay que destacar los trabajos desarrollados por García-Lapresta y Borge (2018) en los que también se proponen nuevas medidas no cuantitativas de dispersión ordinal (una basada en rangos,  $D_R$ , y otra basada en Gini,  $D_G$ ) así como aplicaciones como las de Franceschini y García-Lapresta (2019) que utilizan esta metodología en el contexto de problemas de decisión.

## **2.9 Resumen**

En este capítulo se ha puesto de manifiesto la importancia de tratar de medir adecuadamente la dispersión en variables estadísticas de naturaleza ordinal así como la importancia de recopilarlas y formalizarlas con el rigor matemático necesario.

Para concluir esta sección, a continuación se muestra la Tabla 2.2 que resume las principales medidas de dispersión recogidas en este capítulo así como la notación, los autores, fechas y sus principales características:

Nombre	Abreviatura	Autor(es)	Año	Nominal / Ordinal	Cuantitativa/ Cualitativa
Entropía muestral	H	Shannon	1948	Nominal	Cuantitativa
Variación Ordinal de Leik	LOV	Leik	1966	Ordinal	Cuantitativa
Índice de variación cualitativa	IQV	Mueller <i>et al.</i>	1977	Nominal	Cuantitativa
Índice de variación ordinal	IOV	Berry & Mielke	1992	Ordinal	Cuantitativa
Coeficiente de variación nominal	CNV	Kvalseth	1995	Nominal	Cuantitativa
Coeficiente de variación ordinal	COV	Kvalseth	1995	Ordinal	Cuantitativa
Rango de órdenes	$r_x$	Franceschini & Romano	1999	Ordinal	Cualitativa
Medida de dispersión	$1-l^2$	Blair & Lacy	2000	Ordinal	Cuantitativa
Rango ordinal	$r_{ord}$	Franceschini <i>et al.</i>	2004	Ordinal	Cualitativa
Disenso	Dsn	Tastle & Wierman	2007	Ordinal	Cuantitativa
Variación Total	$V_T$	Gadrich <i>et al.</i>	2015	Nom./Ord.*	Cuantitativa
Medida de dispersión basada en rangos	$D_R$	García-Lapresta & Borge	2018	Ordinal	Cualitativa
Medida de dispersión basada en Gini	$D_G$	García-Lapresta & Borge	2018	Ordinal	Cualitativa

\*Depende de la función L

Tabla 2.2 - Medidas de dispersión cualitativas del capítulo 2 (en orden cronológico)

### **3 Clasificación de las medidas de dispersión existentes: propiedades, análisis y equivalencia.**

Con el objetivo de realizar un análisis y una clasificación de las diferentes medidas de dispersión existentes, en esta memoria proponemos y definimos formalmente una serie de propiedades que van permitir clarificar las diferencias entre las diferentes medidas de dispersión existentes. Estas propiedades harán posible detectar las principales deficiencias/bondades de la mayoría de las medidas así como clasificar dichas medidas en diferentes grupos según su comportamiento.

Para formalizar y definir las propiedades de una función de dispersión, se ha analizado el trabajo llevado a cabo sobre este tema en la literatura. De manera general, podemos decir que se le ha dedicado poca atención a la revisión de las propiedades que una medida de dispersión ha de cumplir. Stevens (1946) apuntaba que la propiedad de invarianza bajo transformaciones monótonas es la propiedad básica de variables ordinales y otros autores como Kvalseth (1995) y Blair y Lacy (1996) también mencionan la necesidad de la invarianza ante los cambios de escala (Allison, 1978) (ver propiedad 3.3). La presunción de que la máxima dispersión se da en el vector polar (con la mitad de la muestra en cada una de las categorías extremas, ver Definición 3.5), también está presente en la mayoría de los autores estudiados (ver propiedad 3.4).

Sin embargo, no es hasta 2006 cuando Tastle y Wierman definen más formalmente las reglas que debe cumplir una medida de dispersión. (Tastle y Wierman, 2006, 2007). Posteriormente, Gadrach y Bashkansky (2012) también enuncian una serie de propiedades deseables que debe cumplir una medida de dispersión ordinal, entre las que se encuentran las anteriores y la propiedad de invarianza frente a distribuciones complementarias (ver propiedad 3.9).

Teniendo en cuenta por tanto que la formalización de las propiedades que deben cumplir las medidas de dispersión ordinal ha sido muy poco tratada en



la literatura (únicamente las propiedades 3.3, 3.4 y 3.9 han sido vagamente introducidas por otros autores y no siempre formuladas matemáticamente), parece deseable introducir más rigurosidad en este tema. Además, en nuestra profunda revisión bibliográfica, no hemos encontrado ningún autor que analice las propiedades en cada una de las medidas existentes.

Por estas razones, a continuación definimos formalmente propiedades de las medidas de dispersión (ver (F4) en 2.1) y analizamos en las medidas presentadas en el capítulo anterior. Nótese que no se analizarán las propiedades en la medida  $(1-l^2)$  (Blair y Lacy, 2000) ni con la distancia euclídea ni con la distancia de Manhattan, dado que su relación directa con el resto de medidas (ver Observación 2.8) hacen que las demostraciones de las propiedades sean triviales. Por la misma razón, tampoco se analizará la medida de variación total  $V_T$  de Gadrich *et al.* (2015) (ver Observación 2.9).

### **3.1 Tipo de output**

Aunque en principio, y por definición de lo que se entiende por una "medida", parece natural afirmar que toda medida debería tomar valores en el conjunto de los números reales para cuantificar de alguna manera el grado de dispersión que tiene nuestra población; ni siquiera en esto están de acuerdo todos los autores por lo que se ha decidido incluir esta propiedad para poder clasificar algunas medidas encontradas en la literatura como el rango ordinal de Franceschini *et al.* (2004) o las medidas de García-Lapresta y Borge (2018) ( $D_R$  y  $D_G$ ).

El tipo de output de la medida de dispersión puede ser cualitativo o cuantitativo. Dentro de los cualitativos puede ser ordenado (linealmente o parcialmente) o no ordenado (comúnmente referenciado como nominal).

### 3.2 No negatividad

#### Definición 3.1 – $D$ no negativa

Una medida de dispersión  $D$  es no negativa si se cumple que

$$D(f_1, f_2, \dots, f_k) \geq 0 \quad \forall f \in [0,1]^{k*}.$$

A continuación se demuestra que las medidas propuestas en la literatura satisfacen esta propiedad:

#### Proposición 3.1

Las medidas LOV, IOV y COV son no negativas.

*Demostración:* Dado que los vectores  $n, f, F$  son no negativos y que el vector  $L$  de categorías está ordenado de forma que  $(j-i) > 0 \quad \forall j > i$ , las métricas anteriores cumplen esta propiedad de forma trivial.  $\square$

#### Proposición 3.2

La entropía de Shannon ( $H$ ) es no negativa.

*Demostración:* (ver Shannon, 1948).  $\square$

#### Proposición 3.3

El disenso de Tastle y Wierman ( $D_{sn}$ ) es no negativo.

*Demostración:*

$$D_{sn_{L,X}}(f) = - \sum_{i=1}^k f_i \log_2 \left( 1 - \frac{|l_i - \mu_x|}{l_{\max} - l_{\min}} \right) \quad \text{con} \quad \mu_x(f) = \sum_{i=1}^k f_i l_i.$$

Como  $f \in [0,1]^{k*}$  se cumple que  $\sum_{i=1}^k f_i = 1$  y por tanto  $l_{\min} \leq \mu_x(f) \leq l_{\max}$ .

Además, por construcción de la escala ordinal se cumple que  $l_{\min} < l_i < l_{\max}$

Se cumple por tanto que  $|l_i - \mu_x| \leq l_{\max} - l_{\min} \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$  y que  $\frac{|l_i - \mu_x|}{l_{\max} - l_{\min}} \leq 1$ .

Además se cumple trivialmente que  $\frac{|I_i - \mu_x|}{I_{\max} - I_{\min}} \geq 0$  (por definición de valor absoluto y de las etiquetas de la escala ordinal).

Se tiene por tanto que  $[1 - \frac{|I_i - \mu_x|}{I_{\max} - I_{\min}}] \in [0, 1] \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$  y por tanto al igual que en la proposición anterior se cumple que  $Dsn_{L,x}(f) > 0$ .  $\square$

### **3.3 Invarianza de la escala (Independencia de $N$ )**

El criterio de la invarianza de la escala fue descrito por Allison (1978) y referido por el resto de los autores estudiados. Esta propiedad asegura que la medida de dispersión no varía cuando el tamaño muestral de cada categoría es multiplicado por un mismo factor.

#### **Definición 3.2 – $D$ invariante en la escala**

Una medida de dispersión  $D$  es invariante en la escala o independiente de  $N$  cuando se cumple que  $D(n_1, n_2, \dots, n_k) = D(c \cdot n_1, c \cdot n_2, \dots, c \cdot n_k) \quad \forall c \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^{k*}$ .

#### **Observación 3.1**

Nótese que esto implicaría que el tamaño muestral del primer vector  $N = \sum_{i=1}^k n_i$  es distinto del segundo,  $N' = c \cdot N$ , y por tanto esta propiedad implica también la independencia de la medida de dispersión  $D$  respecto al tamaño muestral  $N$ .

#### **Proposición 3.4**

El LOV es independiente de la escala.

*Demostración:* (ver Leik, 1966).  $\square$

#### **Proposición 3.5**

El IOV (según su definición original, ver Definición 2.8) no es independiente de la escala.

*Demostración:* En la definición de Berry y Mielke (1992) las cotas entre las que se divide esta medida se adaptan en función de la paridad de  $N$  por lo que el resultado varía en función de  $N$ .  $\square$

### **Observación 3.2**

Tal y como se indicó en la Observación 2.6 en esta memoria se trabajará con la adaptación de la medida IOV que toma valores en el espacio de frecuencias relativas y utilizando para cualquier  $N$  la fórmula dada por Berry y Mielke para el caso  $N$  par.

Con carácter general, es importante mencionar que aquellas medidas que no sean invariantes en la escala, deben reformularse adecuadamente para que satisfagan dicha condición y sea posible definirlas a partir de sus distribuciones de frecuencias relativas.

### **Definición 3.3 IOV<sub>indpteN</sub>:**

Sea  $f \in [0,1]^{k*}$  un vector de frecuencias relativas, se define el IOV<sub>indpteN</sub> como:

$$IOV_{indpteN}: [0, 1]^{k*} \rightarrow [0, 1]$$

$$f \rightarrow IOV_{indpteN}(f) = \frac{4}{k-1} \sum_{i < j} f_i f_j (j-i) \quad \text{con } 1 \leq i, j \leq k.$$

### **Proposición 3.6**

La medida IOV<sub>indpteN</sub> es independiente de la escala.

*Demostración:* IOV<sub>indpteN</sub> depende del vector de frecuencias relativas y su formulación no depende de la paridad de  $N$ .  $\square$

### **Proposición 3.7**

El COV es independiente de la escala.

*Demostración:* Esta medida depende de la distribución de frecuencias relativas  $f$  que es independiente del tamaño muestral  $N$ .  $\square$

### **Proposición 3.8**

La entropía de Shannon ( $H$ ) y el Disenso de Tastle y Wierman ( $D_{sn}$ ) son independientes de la escala.

*Demostración:* Estas medidas son función de  $f$ , que tampoco depende del tamaño muestral por lo que también verifican esta propiedad.  $\square$

### **3.4 Valores de frontera**

Los autores estudiados coinciden en que la ausencia total de dispersión se da cuando toda la muestra se concentra en una única categoría y que en este caso, la dispersión toma el valor 0. Conviene notar que esto implica la no negatividad de las medidas analizadas (ver 3.2).

A la hora de definir la dispersión máxima, se debe mencionar que en la bibliografía analizada refieren dos tipos de situaciones de dispersión máxima de variables cualitativas en función de si se trata de variables nominales u ordinales (Blair y Lacy, 2000). En el caso de variables nominales la dispersión es máxima cuando la muestra se distribuye de manera uniforme entre las categorías (también llamado caso de mayor "spread") y se hablará del vector uniforme  $(1/k, 1/k, \dots, 1/k)$ . En variables ordinales en cambio la dispersión es máxima cuando se tiene la mitad de la muestra en cada una de las categorías extremas, es decir en la primera categoría y la  $k$ -ésima. En este caso se dice que la muestra está polarizada y hablaremos del vector polar  $(1/2, \dots, 1/2)$ .

#### **Definición 3.4 – Vector uniforme**

Sea  $X$  una variable estadística categórica con  $k$  categorías  $k > 1$ . Se define el vector de frecuencias relativas uniforme  $f_{uniforme} \in [0,1]^{k*}$  como

$$f_{uniforme} = (1/k, 1/k, \dots, 1/k).$$

### Definición 3.5 – Vector polar

Sea  $X$  una variable estadística categórica con  $k$  categorías  $k > 1$ . Se define el vector de frecuencias relativas polar  $f_{polar} \in [0,1]^{k*}$  como

$$f_{polar} = (1/2, \dots, 1/2).$$

### Observación 3.3

De forma general, dado un vector polar, es fácil ver que la mediana única será la categoría  $k$ -ésima, es decir, se cumple que:  $Med_u(f_{polar}) = k$ .

### Definición 3.6 – $D$ satisface las condiciones de frontera uniformes o de “spread”

Dada una variable estadística cualitativa  $X$  diremos que una medida de dispersión  $D$  sobre  $X$  satisface las condiciones de frontera uniformes o de “spread” si:

- 1) Dispersión mínima: Se alcanza la dispersión mínima en los  $k$  vectores que concentran toda la muestra en una única categoría.  
 $D(f_1, f_2, \dots, f_k) = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $f_i = 1$  y  $f_j = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \ j \neq i$ .
- 2) Dispersión máxima: Se alcanza la dispersión máxima en el vector uniforme.  
 $D(f_1, f_2, \dots, f_k) > D(g_1, g_2, \dots, g_k) \ \forall (g_1, g_2, \dots, g_k) \Leftrightarrow f_i = 1/k \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .

### Definición 3.7 – $D$ satisface las condiciones de frontera polarizadas

Dada una variable estadística cualitativa  $X$  diremos que una medida de dispersión  $D$  sobre  $X$  satisface las condiciones de frontera polarizadas si:

- 1) Dispersión mínima: Se alcanza la dispersión mínima en los  $k$  vectores que concentran toda la muestra en una única categoría.  
 $D(f_1, f_2, \dots, f_k) = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $f_i = 1$  y  $f_j = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \ j \neq i$ .
- 2) Dispersión máxima: Se alcanza la dispersión máxima en el vector polar.

$$D(f_1, f_2, \dots, f_k) > D(g_1, g_2, \dots, g_k) \quad \forall (g_1, g_2, \dots, g_k)$$

$$\Leftrightarrow f_1 = 1/2, \quad f_k = 1/2 \text{ y } f_j = 0 \quad \forall j \in \{2, \dots, k-1\}.$$

Las medidas presentadas en el capítulo anterior alcanzan su dispersión máxima por definición en las condiciones de frontera polarizadas, excepto la entropía de Shannon que alcanza su máxima dispersión en las condiciones de frontera uniformes (Tastle y Wierman, 2007).

En general, se puede hablar de condiciones de frontera polarizadas para medidas de dispersión ordinales mientras que las medidas de dispersión nominales suelen verificar las condiciones de frontera uniformes o de spread.

### 3.5 Mitosis

#### Definición 3.8 – $D$ satisface la propiedad de mitosis

Sea  $f \in [0,1]^{k*}$  vector de frecuencias relativas. Sea  $r \in \mathbb{N}$  con  $1 < r < k$  y sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  con  $0 \leq \alpha \leq f_r$ . Sea  $f' \in [0,1]^{k*}$  definido como:

$$f'_i = \begin{cases} f_i + (\alpha/2) & \text{si } i = (r-1) \text{ o } i = (r+1), \\ f_i - \alpha & \text{si } i = r, \\ f_i & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se dice que una medida de dispersión  $D$  satisface la propiedad de mitosis si  $D(f) \leq D(f')$ .

#### Proposición 3.9

El LOV satisface la propiedad de mitosis.

*Demostración:* Dados  $f$  y  $f'$  como en la Definición 3.8, se tienen los vectores de frecuencias acumuladas:

$$F = (F_1, \dots, F_{r-1}, F_r, F_{r+1}, \dots, 1).$$

$$F' = (F'_1, \dots, F'_{r-1}, F'_r, F'_{r+1}, \dots, F'_k) = (F_1, \dots, F_{r-1} + (\alpha/2), F_r - (\alpha/2), F_{r+1}, \dots, 1).$$

Es decir, los vectores de frecuencias acumuladas difieren únicamente en las componentes  $r-1$  y  $r$ . Se observa además que  $F'_{r-1} + F'_r = F_{r-1} + F_r$ .

Para demostrar que  $\text{LOV}(f') \geq \text{LOV}(f)$ , supongamos  $s \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $F_s \leq 1/2$  y  $F_{s+1} > 1/2$ .

Se recuerda que  $\text{LOV}(f) = (2/(k-1)) \sum_{i=1}^k d_i(f)$ , con  $d_i(f) = F_i$  si  $i \leq s$  y  $d_i(f) = (1 - F_i)$  si  $i > s$ .

**Si  $s < (r-1)$  o  $s \geq (r+1)$**   $\Rightarrow$  Trivialmente se tiene que  $\text{LOV}(f) = \text{LOV}(f')$ , ya que las dos componentes diferentes estarían siendo sumadas ambas como frecuencias acumuladas o ambas como su complementario, en cualquiera de los dos casos se obtiene la misma suma.

Si  **$s = r-1$**  se tiene que  $F_{r-1} \leq 1/2$  y  $F_r > 1/2$ :

- Supongamos que también se cumple  $F'_{r-1} \leq 1/2$  y  $F'_r > 1/2$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{LOV}(f') &= (2/(k-1)) \left[ \sum_{i=1}^{r-2} F'_i + F'_{r-1} + (1-F'_r) + \sum_{i=r+1}^k (1-F'_i) \right] = \\ &= (2/(k-1)) \left[ \sum_{i=1}^{r-2} F_i + F_{r-1} + (\alpha/2) + 1-F_r + (\alpha/2) + \sum_{i=r+1}^k (1-F_i) \right] = \\ &= \text{LOV}(f) + (2/(k-1))\alpha. \end{aligned}$$

Y como  $\alpha \geq 0 \Rightarrow \text{LOV}(f') \geq \text{LOV}(f)$ .

- Supongamos  $\alpha/2$  tal que  $F'_{r-1} = F_{r-1} + (\alpha/2) > 1/2$ . Se tiene por tanto que  $F'_r > 1/2$ , entonces:

$$\begin{aligned} \text{LOV}(f') &= (2/(k-1)) \left[ \sum_{i=1}^{r-2} F'_i + (1-F'_{r-1}) + (1-F'_r) + \sum_{i=r+1}^k (1-F'_i) \right] = \\ &= (2/(k-1)) \left[ \sum_{i=1}^{r-2} F_i + (1-F_{r-1} - (\alpha/2)) + 1-F_r + (\alpha/2) + \sum_{i=r+1}^k (1-F_i) \right] = \\ &= (2/(k-1)) \left[ \sum_{i=1}^{r-1} F_i + 1-2F_{r-1} + \sum_{i=r}^k (1-F_i) \right] = \end{aligned}$$



$$= LOV(f) + (2/(k-1)) (1 - 2F_{r-1}).$$

Y como  $F_{r-1} \leq 1/2 \Rightarrow 2 F_{r-1} \leq 1 \Rightarrow (1 - 2 F_{r-1}) \geq 0 \Rightarrow LOV(f') \geq LOV(f)$ .

- Supongamos  $\alpha/2$  tal que  $F'_{r-1} \leq 1/2$  pero también  $F'_r \leq 1/2$  Conviene notar que  $F'_{r+1} = F_{r+1} \geq F_r > 1/2$ , entonces:

$$\begin{aligned} LOV(f') &= (2/(k-1)) \left[ \sum_{i=1}^{r-2} F'_i + F'_{r-1} + F'_r + \sum_{i=r+1}^k (1 - F'_i) \right] = \\ &= (2/(k-1)) \left[ \sum_{i=1}^{r-2} F_i + F_{r-1} + (\alpha/2) + F_r - (\alpha/2) + \sum_{i=r+1}^k (1 - F_i) \right] = \\ &= (2/(k-1)) \left[ \sum_{i=1}^{r-1} F_i + 2F_r - 1 + \sum_{i=r}^k (1 - F_i) \right] = \\ &= LOV(f) + (2/(k-1)) (2F_r - 1). \end{aligned}$$

Y como  $F_r > 1/2 \Rightarrow 2 F_r > 1 \Rightarrow (2 F_r - 1) > 0 \Rightarrow LOV(f') > LOV(f)$ .

Si  $s = r$  se tiene que  $F_r \leq 1/2$  y  $F_{r+1} > 1/2$ :

Nótese que  $F'_{r+1} = F_{r+1} > 1/2$ . Además, como  $F'_r = F_r - (\alpha/2)$  y  $\alpha \geq 0 \Rightarrow F'_r \leq F_r \leq 1/2$  y  $F'_{r-1} \leq 1/2$ , luego las dos componentes  $r$  y  $(r-1)$  del vector de frecuencias acumuladas que son diferentes en  $F$  y  $F'$  son sumadas directamente y como  $F'_{r-1} + F'_r = F_{r-1} + F_r$  se tiene que  $LOV(f) = LOV(f')$ .  $\square$

### Proposición 3.10

El  $IOV_{indpteN}$  satisface la propiedad de mitosis.

*Demostración:*

$$IOV_{indpteN}(f') = \frac{4}{k-1} \sum_{i < j} f'_i f'_j (j-i) = \frac{4}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k f'_i f'_j (j-i).$$

Tras algunos cálculos puede verse que:

$$IOV_{indpteN}(f') = IOV_{indpteN}(f) + \alpha (f_r - (\alpha/2)).$$

Como  $0 \leq \alpha \leq f_r$ , entonces  $\alpha (f_r - (\alpha/2)) \geq 0$  y por tanto  $IOV_{indpteN}(f') \geq IOV_{indpteN}(f)$ .  $\square$

### Proposición 3.11

El COV satisface la propiedad de mitosis.

*Demostración:*

$$\begin{aligned} COV(f') &= 1 - \sqrt{1 - IOV_{indpteN}(f')} = 1 - \sqrt{1 - [IOV_{indpteN}(f) + \alpha(f_r - \frac{\alpha}{2})]} \stackrel{(1)}{\geq} \\ &\stackrel{(1)}{\geq} 1 - \sqrt{1 - IOV_{indpteN}(f)} = COV(f). \end{aligned}$$

(1) La desigualdad se cumple porque  $0 \leq (\alpha/2) \leq \alpha \leq f_r$  y por tanto  $\alpha(f_r - (\alpha/2)) \geq 0$ . □

### Proposición 3.12

La medida Dsn no satisface la propiedad de mitosis.

*Demostración:* Sea una variable estadística ordinal  $R$  recodificada a una variable discreta  $X$  con 5 categorías  $Ax = \{1, 2, 4, 6, 7\}$  y sea el vector  $f = (0.2, 0.2, 0.1, 0.2, 0.3)$ . Tomando  $r = 4$  y  $\alpha = 0.1$  se tiene  $f' = (0.2, 0.2, 0.15, 0.1, 0.35)$ . Se tiene que  $Dsn(f) = 0.732$  y  $Dsn(f') = 0.729$  por tanto no se cumple la propiedad de mitosis. □

### Proposición 3.13

El Dsn con  $Ax = Lx = \{1, \dots, k\}$  (ver Observación 2.10) satisface la propiedad de mitosis.

*Demostración:* Dados  $f$  y  $f'$  como en la Definición 3.8. Las únicas componentes que difieren entre ambos vectores son las componentes  $(r-1)$ ,  $r$  y  $(r+1)$ .

$$\text{Se cumple que } \mu_x(f') = \sum_{i=1}^k f'_i i = \sum_{i=1}^k f_i i + (\alpha/2)(r-1) - \alpha r + (\alpha/2)(r+1) = \mu_x(f).$$

Notaremos  $\mu_x(f') = \mu_x(f) = \mu$ .

Se quiere demostrar que:

$$Dsn(f') = -\sum_{i=1}^k f'_i \log_2(1 - \frac{|i - \mu|}{k-1}) \geq -\sum_{i=1}^k f_i \log_2(1 - \frac{|i - \mu|}{k-1}) = Dsn(f).$$

Como  $\mu_x(f') = \mu_x(f)$  y  $f'_i = f_i \forall i \neq \{(r-1), r, (r+1)\}$  se quiere demostrar que:

$$\begin{aligned} f'_{r-1} \log_2(1 - \frac{|(r-1) - \mu|}{k-1}) + f'_r \log_2(1 - \frac{|r - \mu|}{k-1}) + f'_{r+1} \log_2(1 - \frac{|(r+1) - \mu|}{k-1}) &\leq \\ &\leq f_{r-1} \log_2(1 - \frac{|(r-1) - \mu|}{k-1}) + f_r \log_2(1 - \frac{|r - \mu|}{k-1}) + f_{r+1} \log_2(1 - \frac{|(r+1) - \mu|}{k-1}). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la Definición 3.8, la inecuación anterior quedaría:

$$(\alpha/2) \log_2(1 - \frac{|(r-1) - \mu|}{k-1}) - \alpha \log_2(1 - \frac{|r - \mu|}{k-1}) + (\alpha/2) \log_2(1 - \frac{|(r+1) - \mu|}{k-1}) \leq 0.$$

$$\log_2(1 - \frac{|(r-1) - \mu|}{k-1}) + \log_2(1 - \frac{|(r+1) - \mu|}{k-1}) \leq 2 \log_2(1 - \frac{|r - \mu|}{k-1}).$$

$$\log_2[(1 - \frac{|(r-1) - \mu|}{k-1})(1 - \frac{|(r+1) - \mu|}{k-1})] \leq \log_2[(1 - \frac{|r - \mu|}{k-1})^2].$$

$$[(1 - \frac{|(r - \mu) - 1|}{k-1})(1 - \frac{|(r - \mu) + 1|}{k-1})] \leq (1 - \frac{|r - \mu|}{k-1})^2.$$

$$\text{Como } k-1 > 0, [(k-1) - |(r - \mu) - 1|][(k-1) - |(r - \mu) + 1|] \leq ((k-1) - |r - \mu|)^2.$$

Sean  $a = k-1$  y  $b = r-\mu$ , se tiene entonces:

$$[a - |b - 1|][a - |b + 1|] \leq (a - |b|)^2.$$

Hay que notar que como  $1 < r < k \rightarrow k \geq 3 \rightarrow a = k-1 \geq 2 > 0 \rightarrow$

$$\rightarrow (a-1) \geq 1 \rightarrow (a-1)^2 \geq (a-1).$$

A continuación se analizarán las diferentes casuísticas:

- Si  $b = 0 \rightarrow (a-1)^2 \leq a^2$ .
- Si  $b = 1$  ó  $b = -1 \rightarrow a(a-2) \leq (a-1)^2$ .
- Si  $b > 1 \rightarrow (a-(b-1))(a-(b+1)) \leq (a-b)^2 \Leftrightarrow ((a-b)+1)((a-b)-1) \leq (a-b)^2$ .

- Si  $b < -1 \rightarrow (a+(b-1))(a+(b+1)) \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow ((a+b)-1)((a+b)+1) \leq (a+b)^2$ .
- Si  $0 < b < 1 \rightarrow (a+(b-1))(a-(b+1)) \leq (a-b)^2 \Leftrightarrow ((a-1)+b)((a-1)-b) \leq (a-b)^2$   
 $\Leftrightarrow (a-1)^2 - b^2 \leq (a-b)^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 \leq (a-b)^2 + b^2$ , que se cumple ya que  $0 < b < 1$ .
- Si  $-1 < b < 0 \rightarrow (a+(b-1))(a-(b+1)) \leq (a+b)^2 \Leftrightarrow ((a-1)+b)((a-1)-b) \leq (a+b)^2$   
 $\Leftrightarrow ((a-1)+b)((a-1)-b) \leq ((a-1)+(1+b))^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 - b^2 \leq ((a-1)+(1+b))^2$ ,  
 que se cumple ya que  $(1+b) > 0$  y  $b^2 > 0$ .  $\square$

### Proposición 3.14

La medida de entropía muestral  $H$  no satisface la propiedad de mitosis.

*Demostración:* A continuación se muestra un contraejemplo. Sean  $f = (0.1, 0.2, 0.3, 0.1, 0.3)$  y  $f' = (0.1, 0.35, 0, 0.25, 0.3)$ , se cumple que  $H(f) = 2.17 > 1.88 = H(f')$ , por lo que la entropía no satisface la propiedad de mitosis.  $\square$

## 3.6 Índice $D \in [0,1]$

Otra propiedad deseable de una medida de dispersión es que se encuentre acotada en el intervalo  $[0,1]$ .

### Proposición 3.15

Las medidas LOV, IOV<sub>indpteN</sub> y COV toman valores en el intervalo  $[0,1]$ .

*Demostración:* Estas medidas se construyen dividiendo entre el valor máximo que pueden tomar (ver capítulo 2), por tanto verifican esta propiedad.  $\square$

### Proposición 3.16

El Disenso de Tastle y Wierman ( $D_{sn}$ ) está acotado en el intervalo  $[0,1]$ .

*Demostración:* (ver Tastle y Wierman, 2007).  $\square$

### Proposición 3.17

La entropía de Shannon ( $H$ ) no está acotada en el intervalo  $[0,1]$ .

*Demostración:* La entropía de Shannon verifica la cota inferior ya que es mínima cuando  $\exists j \in \{1,2,\dots,k\}$  tal que  $f_j = 1$  y  $f_i = 0 \forall i \neq j$ .

Se tiene entonces por convenio que  $H(f) = - \sum f_j \log_2 f_j = 0$ .

Pero no verifica la cota superior en el caso de frontera de distribución uniforme. En este caso se tiene que  $f_i = (1/k) \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ , y por tanto  $H(f) = - \sum (1/k) \log_2(1/k) = \log_2(k)$  que no está acotado, con lo que la entropía no verifica la cota superior de 1.  $\square$

Obsérvese que para el caso frontera de polarización se tendría que  $f_1 = 1/2$ ,  $f_k = 1/2$  y  $f_i = 0 \forall i \in \{2, \dots, k-1\}$ . Por tanto,  $H(f) = - ((1/2) \log_2(1/2) + (1/2) \log_2(1/2)) = - \log_2(1/2) = 1$ .

### **Definición 3.9 – Entropía de Shannon acotada - $H^*$ :**

La entropía de Shannon acotada viene dada por la siguiente expresión:

$$H^*(f) = H(f) / \log_2(k).$$

Nótese que en ese caso  $H^*$  sí verificaría  $H^*(f) \in [0, 1] \forall f \in [0, 1]^k$ .

## **3.7 Invarianza frente a traslaciones**

Una de las propiedades que más se le atribuyen al concepto de dispersión o varianza en Estadística es la de invarianza de la medida frente a traslaciones. Tanto en el marco de variables estadísticas cuantitativas como en el de variables aleatorias, cuando a un conjunto de datos  $X$  lo trasladamos una constante  $a$  (es decir transformamos la variable estadística  $X$  en otra  $Y = X+a$ ) cualquier medida de dispersión debería dar el mismo valor sobre  $X$  que sobre  $X+a$ .

Si bien es cierto que esta propiedad parece clara en el contexto de variables estadísticas cuantitativas, no queda claro cómo expresar dicha propiedad en el contexto de variables no cuantitativas (ya sean ordinales o nominales). A continuación se presentan un concepto que recoge la idea de traslación:

**Definición 3.10  $f^{(a)}$  Vector resultado de una traslación de “a” posiciones en el vector de frecuencias relativas  $f$**

Dado un parámetro  $a \in \mathbb{N}$  y  $f \in [0,1]^{k*}$  un vector de frecuencias relativas con  $f_j = 0 \ \forall j \in \{k-a+1, \dots, k\}$ , se define  $f^{(a)}$  como el resultado de una traslación de “a” posiciones en el vector de frecuencias relativas  $f$  cuando se cumple que  $f^{(a)}_j = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, a\}$  y  $f^{(a)}_i = f_{i-a} \ \forall i \in \{a+1, \dots, k\}$ .

Ejemplo 3.1:

Dado  $a = 2$  y un vector  $f = (0.2, 0.5, 0.3, 0, 0)$  entonces  $f^{(2)} = (0, 0, 0.2, 0.5, 0.3)$  es el resultado de una traslación de 2 posiciones en el vector de frecuencias.

Esta traslación puede ser entendida como que la población se desplaza “a” posiciones en la escala ordinal fija de forma homogénea.

Si el ejemplo anterior fuese tomado de una escala de Likert, se entendería que inicialmente el 50% de la población estaba en “Desacuerdo”, encontrando un 30% “Neutral” y un 20% “Muy en Desacuerdo”. Las opiniones de la población se desplazan 2 posiciones en la escala de Likert encontrando entonces que el 50% de la población está en la categoría de “Acuerdo”, el 30% antes “Neutral” está ahora “Muy de acuerdo” y finalmente el 20% que estaba “Muy en Desacuerdo” que pasó ahora a “Neutral”.

**Definición 3.11 –  $D$  invariante frente a traslación en  $f$**

Diremos que una medida  $D$  es invariante frente a una traslación de “a” posiciones en el vector de frecuencias relativas cuando se cumple que  $D_L(f) = D_L(f^{(a)}) \ \forall f$  vector de frecuencias y  $f^{(a)}$  vector de frecuencias resultado de una traslación “a” posiciones de  $f$ .

Ejemplo 3.2:

Dados los vectores anteriores  $f = (0.2, 0.5, 0.3, 0, 0)$  y  $f^{(2)} = (0, 0, 0.2, 0.5, 0.3)$ , y el parámetro  $a = 2$  y una medida  $D$  invariante frente a traslaciones, se tiene entonces que  $D(f) = D(f^{(2)})$ .

### Proposición 3.18

El LOV es invariante frente a traslaciones en  $f$ .

*Demostración:* Sean los vectores  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{k-a}, 0, \dots, 0)$  y  $f^{(a)} = (0, \dots, 0, f_{a+1}, \dots, f_k)$ , vector trasladado de  $f$  "a" posiciones. Como  $f^{(a)}_i = f_{i-a}$   $\forall i \in \{a+1, \dots, k\}$  se tiene que  $f^{(a)} = (0, \dots, 0, f_1, \dots, f_{k-a})$ .

El vector de frecuencias acumuladas del vector trasladado  $f^{(a)}$  viene definido

$$\text{por } F^{(a)}_i = \sum_{r=1}^i f^{(a)}_r.$$

Si  $i \leq a$  entonces  $F^{(a)}_i = 0$  y por tanto  $d_i(f^{(a)}) = F^{(a)}_i = 0$ .

$$\text{Si } i > a \text{ entonces } F^{(a)}_i = \sum_{r=1}^i f^{(a)}_r = \sum_{r=1}^a f^{(a)}_r + \sum_{r=a+1}^i f^{(a)}_r = 0 + \sum_{r=a+1}^i f_{r-a} =$$

$$\sum_{j=1}^{i-a} f_j = F_{i-a} \text{ (con } j = r-a).$$

Por definición:

$$d_i(f^{(a)}) = \begin{cases} F^{(a)}_i & \text{si } F^{(a)}_i \leq 1/2, \\ 1 - F^{(a)}_i & \text{si } F^{(a)}_i > 1/2, \end{cases} = \begin{cases} F_{i-a} & \text{si } F_{i-a} \leq 1/2, \\ 1 - F_{i-a} & \text{si } F_{i-a} > 1/2, \end{cases} = d_{i-a}(f).$$

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} LOV(f^{(a)}) &= \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^k d_i(f^{(a)}) = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=a+1}^k d_i(f^{(a)}) = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=a+1}^k d_{i-a}(f) = \\ &= \frac{2}{(k-1)} \sum_{j=1}^{k-a} d_j(f) \stackrel{(1)}{=} \frac{2}{(k-1)} \sum_{j=1}^k d_j(f) = LOV(f). \end{aligned}$$

(1) Por la definición de  $f$ , se tiene que  $F_i = 1 \forall i \in \{a+1, \dots, k\}$  y por tanto  $d_i(f) = 0 \forall i \in \{a+1, \dots, k\}$ .  $\square$

### Proposición 3.19

El  $IOV_{indpteN}$  es invariante frente a traslaciones en  $f$ .

*Demostración:* Sean los vectores  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{k-a}, 0, \dots^{(a)} \dots, 0)$  y  $f^{(a)} = (0, \dots^{(a)} \dots, 0, f^{(a)}_{a+1}, \dots, f^{(a)}_k)$ , vector trasladado de  $f$  "a" posiciones. Como  $f^{(2)}_i = f_{i-a}$   $\forall i \in \{a+1, \dots, k\}$  se tiene que  $f^{(a)} = (0, \dots, 0, f_1, \dots, f_{k-a})$ .

$$\begin{aligned} IOV_{indpteN}(f^{(a)}) &= \frac{4}{k-1} \sum_{i < j} f^{(a)}_i f^{(a)}_j (j-i) = \frac{4}{k-1} \sum_{\substack{i < j \\ j \in \{a+1, \dots, k\}}} f^{(a)}_i f^{(a)}_j (j-i) = \\ &= \frac{4}{k-1} \sum_{\substack{i < j \\ j \in \{1, \dots, k-a\}}} f_i f_j (j-i) \stackrel{(1)}{=} \frac{4}{k-1} \sum_{i < j} f_i f_j (j-i) = IOV_{indpteN}(f). \end{aligned}$$

$$(1) f_j = 0 \quad \forall j \in \{k-a+1, \dots, k\}.$$

□

### Proposición 3.20

El COV es invariante frente a traslaciones en  $f$ .

*Demostración:* Sean los vectores  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{k-a}, 0, \dots^{(a)} \dots, 0)$  y  $f^{(a)} = (0, \dots^{(a)} \dots, 0, f^{(a)}_{a+1}, \dots, f^{(a)}_k) = (0, \dots, 0, f_1, \dots, f_{k-a})$ , vector trasladado de  $f$  en "a" posiciones. Se tiene entonces según indican Blair y Lacy (2000) que  $COV(f^{(a)}) = 1 - \sqrt{1 - IOV(f^{(a)})}$ . Y por la proposición anterior se tiene que la expresión anterior es igual a  $1 - \sqrt{1 - IOV(f)} = COV(f)$ .

□

### Proposición 3.21

La medida Dsn no es invariante frente a traslaciones en  $f$ .

*Demostración:* A continuación se muestra un contraejemplo. Sea una variable estadística ordinal  $R$  recodificada a una variable discreta  $X$  con 5 categorías  $Ax = \{1, 2, 4, 6, 7\}$  y sea el vector  $f = (0.2, 0.5, 0.3, 0, 0)$  y  $f^{(2)} = (0, 0, 0.2, 0.5, 0.3)$ , vector resultado de una traslación de 2 posiciones. Se tiene que  $Dsn(f) = 0.26$  y  $Dsn(f^{(2)}) = 0.21$  por tanto la medida de disenso de Tastle y Wierman no es invariante frente a traslaciones en  $f$ .

□



### Proposición 3.22

El Dsn con  $Ax = Lx = \{1, \dots, k\}$  (ver Observación 2.10) es invariante frente a traslaciones en  $f$ .

*Demostración:* Sean los vectores  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{k-a}, 0, \dots^{(a)} \dots, 0)$  y  $f^{(a)} = (0, \dots^{(a)} \dots, 0, f_{a+1}^{(a)}, \dots, f_k^{(a)}) = (0, \dots, 0, f_1, \dots, f_{k-a})$ , vector trasladado de  $f$  en “ $a$ ” posiciones.

Se demostrará primero que  $\mu_x(f^{(a)}) = a + \mu_x(f)$ . Sea  $m = j - a$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mu_x(f^{(a)}) &= \sum_{j=1}^k j f^{(a)}_j = \sum_{j=a+1}^k j f^{(a)}_j = \sum_{j=a+1}^k j f_{j-a} = \sum_{m=1}^{k-a} (a+m) f_m = \\ &= a \sum_{m=1}^{k-a} f_m + \sum_{m=1}^{k-a} m f_m = a \sum_{m=1}^k f_m + \sum_{m=1}^k m f_m = a + \mu_x(f) \text{ ya que } \sum_{m=1}^k f_m = 1. \end{aligned}$$

Se tiene entonces que:

$$\text{Dsn}_{L,X}(f^{(a)}) = - \sum_{i=1}^k f^{(a)}_i \log_2 \left( 1 - \frac{|i - \mu_x(f^{(a)})|}{k-1} \right) = - \sum_{i=a+1}^k f_{i-a} \log_2 \left( 1 - \frac{|i - (a + \mu_x(f))|}{k-1} \right).$$

Sea  $m = i - a$ , entonces la expresión anterior es igual a:

$$- \sum_{m=1}^{k-a} f_m \log_2 \left( 1 - \frac{|m - \mu_x(f)|}{k-1} \right) = - \sum_{m=1}^k f_m \log_2 \left( 1 - \frac{|m - \mu_x(f)|}{k-1} \right) = \text{Dsn}_{L,X}(f). \quad \square$$

### Proposición 3.23

La entropía de Shannon ( $H$ ) es invariante frente a traslaciones en  $f$ .

*Demostración:* Sean los vectores  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{k-a}, 0, \dots^{(a)} \dots, 0)$  y  $f^{(a)} = (0, \dots^{(a)} \dots, 0, f_{a+1}^{(a)}, \dots, f_k^{(a)}) = (0, \dots, 0, f_1, \dots, f_{k-a})$ , vector trasladado de  $f$  en “ $a$ ” posiciones. Se tiene entonces que:

$$H_{X,L}(f) = - \sum_{i=1}^k f_i \log_2(f_i) = - \sum_{i=1}^{k-a} f_i \log_2(f_i) =$$

$$= - \sum_{i=a+1}^k f^{(a)}_i \log_2(f^{(a)}_i) = - \sum_{i=1}^k f'_i \log_2(f^{(a)}_i) = H_{X,L}(f^{(a)}). \quad \square$$

### 3.8 Invarianza frente a permutaciones

#### Definición 3.12 – $D$ invariante frente a permutaciones

Una medida de dispersión  $D$  satisface la invarianza frente a permutaciones si y solo si  $D(f) = D(\Pi(f)) \quad \forall \Pi$  permutación de  $k$  elementos,  $f \in [0,1]^{k*}$  vector de frecuencias relativas.

#### Observación 3.4

Nótese que las medidas de dispersión que satisfagan esta propiedad son válidas para variables cualitativas nominales pero no lo son para variables cualitativas ordinales, por lo que no es una propiedad deseable de las variables ordinales.

#### Proposición 3.24

Las medidas LOV, IOV<sub>indpteN</sub>, COV y Dsn (tomando  $Ax = Lx = \{1, \dots, k\}$ , ver Observación 2.10) no son invariantes frente a permutaciones.

*Demostración:* Se mostrará un contraejemplo. Sean los vectores  $v = (0.5, 0.5, 0)$  y sea el vector permutación  $w = (0.5, 0, 0.5)$ . Se tiene entonces que:

- $LOV(v) = 0.5 \neq 1 = LOV(w)$ .
- $IOV_{indpteN}(v) = 0.5 \neq 1 = IOV_{indpteN}(w)$ .
- $COV(v) = 0.29 \neq 1 = COV(w)$ .
- $Dsn(v) = 0.42 \neq 1 = Dsn(w)$ . □

#### Proposición 3.25

La medida  $H$  (entropía de Shannon) es invariante frente a permutaciones.

*Demostración:* Dado un vector de frecuencias relativas  $f$  y cualquier permutación del mismo  $\Pi(f)$ , se cumple por la propiedad conmutativa de la suma que:

$$H_{X,L}(f) = -\sum_{i=1}^k f_i \log_2(f_i) = -\sum_{i=1}^k f_{\Pi(i)} \log_2(f_{\Pi(i)}). \quad \square$$

### 3.9 Invarianza frente a distribuciones complementarias

Esta propiedad, propuesta de forma poco rigurosa por Gadrich y Bashkansky (2012) se formaliza a continuación y se analiza para las diferentes medidas existentes.

#### Definición 3.13 – Distribuciones complementarias

Sean dos vectores de frecuencias relativas  $f$  y  $f'$  con  $f, f' \in [0,1]^{k*}$ . Se dirá que  $f$  y  $f'$  son complementarios si verifican que  $f'_i = f_{k-i+1} \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .

Nótese que esto quiere decir que  $f' = (f'_1, f'_2, \dots, f'_k) = (f_k, f_{k-1}, \dots, f_1)$ .

#### Ejemplo 3.3:

Dado un vector  $f = (0.1, 0.4, 0.3, 0.2, 0)$  entonces  $f' = (0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$  es el vector complementario.

#### Definición 3.14 – Invarianza frente a distribuciones complementarias

Una medida de dispersión  $D$  satisface la invarianza frente a distribuciones complementarias si y solo si  $D(f) = D(f') \forall f, f'$  complementarios.

#### Proposición 3.26

El LOV es invariante frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:* Sean  $f$  y  $f'$  dos vectores de frecuencias relativas

complementarios, se tiene entonces que:  $LOV(f') = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^k d_i(f')$ .

El vector de frecuencias acumuladas  $F'$  del vector complementario  $f'$  verifica que:

Si  $i = k$  entonces  $F_k = 1$  y por tanto  $d_k(f') = 0$ .

$$\text{Si } i \neq k: F_i = \sum_{r=1}^i f'_r = \sum_{r=1}^i f_{k-r+1} = 1 - \sum_{r=1}^{k-i} f_r = 1 - F_{k-i}.$$

Entonces:

$$d_i(f') = \begin{cases} F_i & \text{si } F_i \leq 1/2, \\ 1-F_i & \text{si } F_i > 1/2, \end{cases} = \begin{cases} 1-F_{k-i} & \text{si } 1-F_{k-i} \leq 1/2, \\ F_{k-i} & \text{si } 1-F_{k-i} > 1/2, \end{cases} = \begin{cases} 1-F_{k-i} & \text{si } F_{k-i} \geq 1/2, \\ F_{k-i} & \text{si } F_{k-i} < 1/2, \end{cases} = d_{k-i}(f).$$

Nótese que si  $F_{k-i} = 1/2$  entonces  $1-F_{k-i} = 1/2$  y por tanto la igualdad se cumple en cualquiera de las dos expresiones.

Se tiene entonces que:

$$\begin{aligned} LOV(f') &= \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^k d_i(f') = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} d_i(f') = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^{k-1} d_{k-i}(f) \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=0}^{k-1} d_{k-i}(f) = \frac{2}{(k-1)} \sum_{j=1}^k d_{k-j+1}(f) = LOV(f). \end{aligned}$$

(1) Por definición se tiene que  $F_k = 1$  y por tanto  $d_k = 1-F_k = 0$ .  
Con  $j=i+1$  y teniendo en cuenta la propiedad conmutativa de la suma.  $\square$

### Proposición 3.27

El  $IOV_{\text{indpteN}}$  es invariante frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:* Sean  $f$  y  $f'$  dos vectores de frecuencias relativas complementarios, se tiene entonces que:

$$IOV_{\text{indpteN}}(f') = \frac{4}{k-1} \sum_{i < j} f'_i f'_j (j-i) = \frac{4}{k-1} \sum_{i < j} f_{k-i+1} f_{k-j+1} (j-i).$$

Sea  $m = k-i+1$  y  $n = k-j+1$ . Entonces  $i = k-m+1$  y  $j = k-n+1$  y  $j-i = m-n$ .

Como  $i < j$ , entonces  $n < m$  y por tanto  $m-n > 0$ .

Haciendo el cambio de variable se tiene que la expresión anterior es igual a:

$$\frac{4}{k-1} \sum_{n < m} f_m f_n (m-n) = \text{IOV}_{\text{indpteN}}(f). \quad \square$$

### Proposición 3.28

El COV es invariante frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:* Sean  $f$  y  $f'$  dos vectores de frecuencias relativas complementarios, se tiene entonces que:

$$\text{COV}(f') = 1 - \sqrt{1 - \text{IOV}_{\text{indpteN}}(f')}.$$

Y por la proposición anterior se tiene que la expresión anterior es igual a

$$1 - \sqrt{1 - \text{IOV}_{\text{indpteN}}(f)} = \text{COV}(f). \quad \square$$

### Proposición 3.29

$H$  es invariante frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:* Sean  $f$  y  $f'$  dos vectores de frecuencias relativas complementarios y sea  $j = k-i+1$ . Se cumple entonces por la propiedad conmutativa de la suma que:

$$\begin{aligned} H_{X,L}(f') &= - \sum_{i=1}^k f'_i \log_2(f'_i) = - \sum_{i=1}^k f_{k-i+1} \log_2(f_{k-i+1}) = - \sum_{j=k}^1 f_j \log_2(f_j) = \\ &= H_{X,L}(f). \end{aligned} \quad \square$$

### Proposición 3.30

La medida Dsn no es invariante frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:* Se muestra a continuación un contraejemplo. Sea una variable estadística ordinal  $R$  recodificada a una variable discreta  $X$  con 5 categorías  $Ax = \{1, 2, 4, 5, 7\}$  y sea el vector  $f = (0.1, 0.4, 0.3, 0.2, 0)$  y su complementario  $f' = (0, 0.2, 0.3, 0.4, 0.1)$  Se tiene que  $\text{Dsn}(f) = 0.36$  y

$Dsn(f^{(2)}) = 0.32$  por tanto la medida de disenso de Tastle y Wierman no es invariante frente a distribuciones complementarias.  $\square$

### Proposición 3.31

El  $Dsn$  con  $Ax = Lx = \{1, \dots, k\}$  (ver Observación 2.10) es invariante frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:* Sean  $f$  y  $f'$  dos vectores de frecuencias relativas complementarios.

$$Dsn_{L,X}(f') = -\sum_{i=1}^k f'_i \log_2 \left(1 - \frac{|i - \mu_x(f')|}{k-1}\right) \text{ con } \mu_x(f') = \sum_{j=1}^k j f'_j .$$

Se demostrará primero que  $\mu_x(f') = k+1 - \mu_x(f)$ :

Sea  $m = k-j+1$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mu_x(f') &= \sum_{j=1}^k j f'_j = \sum_{j=1}^k j f_{k-j+1} = \sum_{m=k}^1 (k-m+1) f_m = \\ &= k \sum_{m=1}^k f_m - \sum_{m=1}^k m f_m + \sum_{m=1}^k f_m = k+1 - \mu_x(f), \text{ ya que: } \sum_{m=1}^k f_m = 1 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} Dsn_{L,X}(f') &= -\sum_{i=1}^k f'_i \log_2 \left(1 - \frac{|i - \mu_x(f')|}{k-1}\right) = -\sum_{i=1}^k f_{k-i+1} \log_2 \left(1 - \frac{|i - (k+1 - \mu_x(f))|}{k-1}\right) = \\ &= -\sum_{i=1}^k f_{k-i+1} \log_2 \left(1 - \frac{|-(k-1+1) - \mu_x(f)|}{k-1}\right) = -\sum_{m=1}^k f_m \log_2 \left(1 - \frac{|m - \mu_x(f)|}{k-1}\right) = \\ &= Dsn_{L,X}(f), \text{ con } m=k-i+1 \text{ y teniendo en cuenta la propiedad conmutativa de la suma. } \square \end{aligned}$$

### 3.10 Monotonía en $k = 2$ . Linealidad, concavidad y convexidad

Kvalseth (1995) detectó que la medida IOV presentaba un desvío al alza para valores intermedios. Esto plantea el estudio de la monotonía de las medidas analizadas.

A continuación se estudiará la monotonía de las funciones de dispersión presentadas en el caso  $k = 2$ .

Dada una variable estadística  $X$  con  $k = 2$  categorías se tiene que su vector de frecuencias relativas podrá expresarse en función de un único parámetro  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1/2]$  siendo  $f = (\alpha, 1-\alpha)$  y  $F = (\alpha, 1)$ .

En este caso la función de dispersión se define de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} D_L: [0, 1/2] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\rightarrow D_L(\alpha) = D(f, L). \end{aligned}$$

En este caso particular se tiene que las condiciones de frontera son las mismas, ya que el caso de máximo spread es también el caso de polarización. Se cumple que  $D(0) = 0$  y  $D(1/2) = 1$ .

#### Proposición 3.32

El LOV es una función lineal.

*Demostración:* Como  $F = (\alpha, 1)$  se tiene que  $d_1(n) = F_1 = \alpha$  y  $d_2(n) = 1 - F_2 = 0$ .

Entonces,  $LOV(\alpha) = 2\alpha$  y la función LOV es lineal.  $\square$

#### Proposición 3.33

El  $IOV_{\text{indpteN}}$  es una función no lineal, creciente en  $\alpha \in [0, 1/2]$  y cóncava.

*Demostración:* El índice de variación ordinal puede expresarse en función de las frecuencias relativas mediante la siguiente transformación:

$$IOV_{\text{indpteN}}(f) = \frac{4}{k-1} \sum_{i < j} f_i f_j (j-i).$$

$$IOV_{\text{indpteN}}(\alpha) = 4 \alpha (1-\alpha) = 4\alpha - 4\alpha^2.$$

Como  $4\alpha - 4\alpha^2 \neq 2\alpha$ ,  $IOV_{\text{indpteN}}$  no es una función lineal.

Se tiene además que  $IOV_{\text{indpteN}}'(\alpha) = 4 - 8\alpha \geq 0$  en  $\alpha \in [0, 1/2]$ , entonces  $IOV_{\text{indpteN}}$  es una función creciente. Como  $IOV_{\text{indpteN}}''(\alpha) = -8$  es una función cóncava.  $\square$

### Proposición 3.34

El COV es una función lineal.

*Demostración:* Como se mencionó anteriormente, se cumple que  $COV = 1 - \sqrt{1 - IOV_{\text{indpteN}}}$ , entonces:  $COV(\alpha) = 1 - \sqrt{1 - 4\alpha + 4\alpha^2} = 1 - \sqrt{(1 - 2\alpha)^2} = 1 \pm (1 - 2\alpha) = 2\alpha$ , dado que  $\alpha \in [0, 1/2]$ . Así pues  $COV(\alpha)$  es lineal.  $\square$

### Proposición 3.35

La entropía de Shannon  $H$  es una función no lineal, creciente en  $\alpha \in (0, 1/2]$  y cóncava.

*Demostración:*

$$H_{X,L}(\alpha) = -\sum_{i=1}^k f_i \log_2(f_i) = -[\alpha \log_2(\alpha) + (1-\alpha) \log_2(1-\alpha)].$$

$$\begin{aligned} (H_{X,L}(\alpha))' &= -[\log_2(\alpha) + \alpha \frac{1}{\alpha \ln 2} + (-1) \log_2(1-\alpha) + (1-\alpha) \frac{(-1)}{(1-\alpha) \ln 2}] = \\ &= -[\log_2(\alpha) + \frac{1}{\ln 2} - \log_2(1-\alpha) - \frac{1}{\ln 2}] = -\log_2\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right). \end{aligned}$$

Como  $\alpha \in (0, 1/2]$ , entonces  $\alpha/(1-\alpha) \leq 1$  y por tanto  $(H_{X,L}(\alpha))' \geq 0$  con lo que  $H_{X,L}(\alpha)$  es creciente.

Se tiene además que:

$$(H_{X,L}(\alpha))'' = -\left[ \frac{(1-\alpha) - \alpha(-1)}{(1-\alpha)^2} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{1}{\ln 2} \right] = -\left[ \frac{1}{(1-\alpha)\alpha \ln 2} \right] \leq 0 \text{ por lo que}$$

$H_{X,L}(\alpha)$  es cóncava en  $\alpha \in (0, 1/2]$ .  $\square$



### Proposición 3.36

Dsn con  $Ax = Lx = \{1, \dots, k\}$  (ver Observación 2.10) es una función no lineal, creciente en  $\alpha \in (0, 1/2]$  y cóncava.

*Demostración:*

$$Dsn_{L,x}(f) = -\sum_{i=1}^k f_i \log_2 \left(1 - \frac{|i - \mu_x|}{k-1}\right), \text{ con } \mu_x = \sum_{i=1}^k f_i i.$$

Como  $f = (\alpha, 1-\alpha)$ , se tiene que  $\mu_x(f) = \alpha + 2(1-\alpha) = 2-\alpha$ .

$$\begin{aligned} Dsn_{L,x}(f) &= -[\alpha \log_2(1 - |1 - (2-\alpha)|) + (1-\alpha) \log_2(1 - |2 - (2-\alpha)|)] \\ &= -[\alpha \log_2(1 - |\alpha - 1|) + (1-\alpha) \log_2(1 - |\alpha|)]. \end{aligned}$$

Y como  $\alpha \in (0, 1/2]$  se tiene que:

$$Dsn_{L,x}(f) = -[\alpha \log_2(\alpha) + (1-\alpha) \log_2(1-\alpha)].$$

Por tanto Dsn en el caso  $k = 2$  se corresponde con la entropía y por la proposición anterior se trata de una función no lineal, creciente y cóncava.  $\square$

### 3.11 Independencia a valores extremos en situaciones simétricas

Existen varios estudios que analizan el impacto de los rangos utilizados en las respuestas para los valores extremos (Albaum y Murphy, 1988; Watkins, 1992; Clarke, 2000). Por ello parece interesante analizar cómo las medidas de dispersión toman en cuenta estos valores. La propiedad que se presenta a continuación analiza el impacto de los valores extremos en la dispersión calculada con las diferentes medidas propuestas anteriores en el caso de distribuciones simétricas, entendiendo por esto que se trata de distribuciones "centradas", es decir, variables estadísticas cuyas medidas de tendencia central se encuentran en la categoría media.

### Definición 3.15 – Independencia a valores extremos en situaciones simétricas (mediana única central)

Sea  $X$  una variable estadística ordinal que toma valores en una escala ordinal con  $k$  un número impar de categorías y sea  $f \in [0,1]^{k*}$  vector de frecuencias relativas tal que  $Med_u(f) = j = (k+1)/2$ . Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $f^\alpha = (f_1 - \alpha, f_2, \dots, f_{k-1}, f_k + \alpha) \in [0,1]^{k*}$  y que sigue cumpliendo que  $Med_u(f^\alpha) = j = (k+1)/2$ . Entonces, se dice que una medida de dispersión  $D$  es independiente a valores extremos en situaciones simétricas (mediana única central) si  $D(f) = D(f^\alpha)$ .

#### Ejemplo 3.4:

A continuación se muestra el cálculo de la dispersión con las métricas presentadas en el capítulo 2 para 3 vectores con mediana única en la categoría central que difieren únicamente en la distribución en los valores extremos:

Ejemplo	1	2	3	4	5	LOV	IOV_indpteN	COV	Dsn	H
f	50%	0%	50%	0%	0%	0.5	0.5	0.29	0.42	1
$f^{0.4}$	10%	0%	50%	0%	40%	0.5	0.66	0.42	0.52	1.36
$f^{0.25}$	25%	0%	50%	0%	25%	0.5	0.75	0.5	0.5	1.5

Tabla 3.1 - Dispersión de vectores con mediana única central con las diferentes medidas

### Proposición 3.37

Las medidas  $IOV_{indpteN}$ ,  $COV$ ,  $Dsn$  y  $H$  no son independientes a valores extremos en situaciones simétricas.

*Demostración:* El ejemplo anterior sirve como contraejemplo. □

### Proposición 3.38

El LOV es independiente a valores extremos en situaciones simétricas.

*Demostración:* Sean los vectores  $f = (f_1, f_2, \dots, f_j, \dots, f_{k-1}, f_k)$  y  $f^\alpha = (f_1 - \alpha, f_2, \dots, f_j, \dots, f_{k-1}, f_k + \alpha)$  con  $j = (k+1)/2 = Med_u(f) = Med_u(f^\alpha)$ , entonces:

$$LOV(f^\alpha) = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^k d_i(f^\alpha) = \frac{2}{(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^{j-1} d_i(f^\alpha) + \sum_{i=j}^k d_i(f^\alpha) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{r=1}^i f_r^{\alpha} + \sum_{i=j}^k (1 - \sum_{r=1}^i f_r^{\alpha}) \right] = \frac{2}{(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{r=1}^i f_r^{\alpha} + \sum_{i=j}^{k-1} \sum_{r=i+1}^k f_r^{\alpha} \right] = \\
&= \frac{2}{(k-1)} [ [ f_1^{\alpha} + ( f_1^{\alpha} + f_2^{\alpha}) + \dots + ( f_1^{\alpha} + f_2^{\alpha} + \dots + f_{j-1}^{\alpha}) ] + \\
&\quad + [ (f_{j+1}^{\alpha} + f_{j+2}^{\alpha} + \dots + f_k^{\alpha}) + (f_{j+2}^{\alpha} + \dots + f_k^{\alpha}) + \dots + f_k^{\alpha} ] ] = \\
&= \frac{2}{(k-1)} [ [ (f_1 + \alpha) + ((f_1 + \alpha) + f_2) + \dots + ((f_1 + \alpha) + f_2 + \dots + f_{j-1}) ] + \\
&\quad + [ (f_{j+1} + f_{j+2} + \dots + (f_k - \alpha)) + (f_{j+2} + \dots + (f_k - \alpha)) + \dots + (f_k - \alpha) ] ] \stackrel{(1)}{=} \\
&\stackrel{(1)}{=} \frac{2}{(k-1)} \left[ \frac{k-1}{2} \alpha + \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{r=1}^i f_r + \frac{k-1}{2} (-\alpha) + \sum_{i=j}^{k-1} \sum_{r=j+1}^k f_r \right] = LOV(f).
\end{aligned}$$

(1)  $j = (k+1)/2$ . □

### 3.12 Discusión sobre las medidas de dispersión ordinales

A continuación se muestra un cuadro resumen del estudio realizado a lo largo de esta sección indicando en rojo aquellas medidas que son diferentes del resto en el análisis de cada propiedad:

Propiedad	$r_{L,x}$ y $r_{ord}$ $D_R$ y $D_G$	LOV	IOV <sub>indpteN</sub>	COV	Dsn $A_x = \{l_1, \dots, l_k\}$	H
Tipo de output	Cualit. Ordinal	Cuanti.	Cuanti.	Cuanti.	Cuanti.	Cuanti.
No negatividad	No aplica	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Invarianza Escala/N	No aplica	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Valores frontera	No aplica	Polarizada	Polarizada	Polarizada	Polarizada	Spread
Mitosis	No aplica	Sí	Sí	Sí	No	No
$D \in [0,1]$	No aplica	Sí	Sí	Sí	Sí	No
Invarianza Traslaciones	No aplica	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Invarianza Permutaciones	No aplica	No	No	No	No	Sí
Invarianza Distribuciones complementarias	No aplica	Sí	Sí	Sí	No	Sí
Análisis en $k = 2$	No aplica	Lineal	No lineal, creciente y cóncava	Lineal	No lineal, creciente y cóncava	No lineal, creciente y cóncava
Independencia a valores extremos (mediana central)	No aplica	Sí	No	No	No	No

Tabla 3.2 - Resumen del análisis de las propiedades de las medidas del capítulo 2  
(en rojo las medidas que son diferentes del resto en cada propiedad)

Dejando al margen las medidas cualitativas de Franceschini y Romano (1999), Franceschini *et al.* (2004) y las medidas  $D_R$  y  $D_G$  de García-Lapresta y Borge (2018), la Tabla 3.2 de propiedades permite clasificar las diferentes medidas estudiadas de acuerdo a sus propiedades.

La medida  $H$  o entropía de Shannon (1948) es la única medida que cumple las condiciones de frontera uniformes o de spread y es invariante ante permutaciones lo que hace que sea una medida de dispersión adecuada para variables cualitativas nominales pero que no lo sea para variables ordinales.

El resto de las medidas contemplan la dispersión ordinal y son todas medidas no negativas, invariantes de la escala e índices.

El disenso de Tastle y Wierman (Dsn) tal y como lo definieron sus autores (ver Definición 2.14) es la única medida que no verifica la propiedad de invarianza frente a traslaciones o a distribuciones complementarias. Al igual que la entropía, Dsn no satisface tampoco la propiedad de mitosis. Hay que resaltar que es una medida construida de forma muy diferente a las demás medidas cuantitativas de dispersión ordinal, encontrando cierta semejanza por un lado con la formulación de la Entropía y por otro con la varianza de variables continuas ya que contempla la distancia a un valor promedio.

Las medidas LOV, IOV<sub>indpteN</sub> y COV son las más similares en cuanto a las propiedades que satisfacen. No obstante, el COV se diferencia del IOV<sub>indpteN</sub> en que es una medida lineal en  $k = 2$ , lo que tiene sentido ya que su autor quería precisamente corregir el desvío que había encontrado en la medida del IOV<sub>indpteN</sub>. Para conseguir esta corrección el autor introduce la raíz cuadrada lo que hace la medida más compleja analíticamente.

Finalmente el LOV es idéntico al COV en todas las propiedades analizadas salvo en que el LOV satisface la independencia a valores extremos en caso situaciones simétricas.

### ***3.13 Equivalencia entre funciones de dispersión***

En esta sección se introduce el concepto de equivalencia entre funciones de dispersión con el objetivo de generar una relación entre medidas de dispersión que permita clasificarlas en grupos similares.

#### **Definición 3.16 - Medidas de dispersión equivalentes**

Dos medidas de dispersión  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son medidas de dispersión equivalentes ( $\Phi_1 \sim \Phi_2$ ) si:  $\forall X, Y$  variables estadísticas ordinales que toman valores en el mismo conjunto de categorías  $A_X$  se satisface que  $\Phi_{1X} < \Phi_{1Y} \Leftrightarrow \Phi_{2X} < \Phi_{2Y}$ .

En otras palabras, dos medidas son equivalentes si ordenan la dispersión de cualesquiera dos variables estadísticas ordinales de la misma manera.

Obviamente, la relación "ser equivalente" establecida entre medidas de dispersión en la definición anterior es una relación de equivalencia y por tanto proporciona una clasificación del conjunto de medidas ordinales.

### **Proposición 3.39**

La relación  $\sim$  entre dos medidas de dispersión dada en la Definición 3.16 es una relación de equivalencia.

*Demostración:*

Reflexividad:  $\forall \Phi$  medida de dispersión se cumple de manera trivial que  $\Phi \sim \Phi$ .

Simetría: Sean  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  medidas de dispersión, se cumple de manera trivial que si  $\Phi_1 \sim \Phi_2 \Rightarrow \Phi_2 \sim \Phi_1$ .

Transitividad: Sean  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  medidas de dispersión, se demostrará que si  $\Phi_1 \sim \Phi_2$  y  $\Phi_2 \sim \Phi_3 \Rightarrow \Phi_1 \sim \Phi_3$ .

Sean  $X$  e  $Y$  variables estadísticas ordinales que toman valores en el mismo conjunto de categorías  $A_X$ . Por hipótesis se satisface que  $\Phi_{1X} < \Phi_{1Y} \Leftrightarrow \Phi_{2X} < \Phi_{2Y}$  y  $\Phi_{2X} < \Phi_{2Y} \Leftrightarrow \Phi_{3X} < \Phi_{3Y}$  por lo que se tiene que  $\Phi_{1X} < \Phi_{1Y} \Leftrightarrow \Phi_{3X} < \Phi_{3Y}$ , es decir,  $\Phi_1 \sim \Phi_3$ .  $\square$

El hecho de que la relación definida sobre el conjunto de medidas de dispersión sea una relación de equivalencia permitirá clasificar las medidas de dispersión en clases.

### **Lema 3.1**

Sean  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  dos medidas de dispersión equivalentes ( $\Phi_1 \sim \Phi_2$ ), entonces se satisface que  $\forall f, g \in [0,1]^{k^*}$ :

$$\Phi_1(f) = \Phi_1(g) \Leftrightarrow \Phi_2(f) = \Phi_2(g).$$

*Demostración:*

$\Rightarrow$  Sean  $f, g \in [0,1]^{k^*}$  con  $\Phi_1(f) = \Phi_1(g)$ .

Entonces se tiene que  $\Phi_1(f) \leq \Phi_1(g)$  lo que implica que  $\Phi_2(f) \leq \Phi_2(g)$  por ser equivalentes. Por otro lado, también se tiene que  $\Phi_1(g) \leq \Phi_1(f)$  lo que implica que  $\Phi_2(g) \leq \Phi_2(f)$ , y por tanto que tiene que  $\Phi_2(f) = \Phi_2(g)$ .

$\Leftarrow$  Idem. □

### Proposición 3.40

Sean  $\Phi_1, \Phi_2$  dos medidas de dispersión equivalentes, entonces se satisface que:

- a) No negatividad:  $\Phi_1$  satisface 3.2  $\Leftrightarrow \Phi_2$  satisface 3.2.
- b) Invarianza de la escala:  $\Phi_1$  satisface 3.3  $\Leftrightarrow \Phi_2$  satisface 3.3.
- c) Valores de frontera:  $\Phi_1$  satisface 3.4  $\Leftrightarrow \Phi_2$  satisface 3.4.
- d) Mitosis:  $\Phi_1$  satisface 3.5  $\Leftrightarrow \Phi_2$  satisface 3.5.
- e) Invarianza frente a traslaciones:  $\Phi_1$  satisface 3.7  $\Leftrightarrow \Phi_2$  satisface 3.7.
- f) Invarianza frente a permutaciones:  $\Phi_1$  satisface 3.8  $\Leftrightarrow \Phi_2$  satisface 3.8.
- g) Invarianza frente a distribuciones complementarias:  $\Phi_1$  satisface 3.9  $\Leftrightarrow \Phi_2$  satisface 3.9.
- h) Independencia a valores extremos en situaciones simétricas:  $\Phi_1$  satisface 3.11  $\Leftrightarrow \Phi_2$  satisface 3.11.

*Demostración:*

- a) Propiedad 3.2 - No negatividad

La propiedad 3.2 de No negatividad se cumple trivialmente por definición de medida de dispersión, en particular para cualquier par de medidas de dispersión equivalentes.

- b) Propiedad 3.3 - Invarianza de la escala (Independencia de N)

$\Leftarrow$  Sea  $\Phi_1$  una medida de dispersión que satisface 3.3. Entonces  $\forall c \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^k$  se cumple que  $\Phi_1(n_1, n_2, \dots, n_k) = \Phi_1(c \cdot n_1, c \cdot n_2, \dots, c \cdot n_k)$ . Por el Lema 3.1 se

tiene entonces que  $\forall c \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{N}^k \Phi_2(n_1, n_2, \dots, n_k) = \Phi_2(c^*n_1, c^*n_2, \dots, c^*n_k)$  por lo que se deduce que  $\Phi_2$  satisface 3.3.

$\Rightarrow$  Idem.

c) Propiedad 3.4 - Valores de frontera

1)  $\Rightarrow$  Sea  $\Phi_1$  una medida de dispersión que satisface las condiciones de frontera polarizada. Entonces se satisface que  $\Phi_1(f_0) \leq \Phi_1(f) \leq \Phi_1(f_{polar})$   $\forall f \in [0,1]^{k*}$ , con  $f_0 = (f_1, f_2, \dots, f_k) \in [0,1]^{k*}$  en el que  $\exists i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $f_i = 1$  y  $f_{polar} = (1/2, \dots, 1/2)$  el vector polar (Definición 3.5).  
 $\Leftarrow$  Sea  $\Phi_2$  una medida de dispersión equivalente a  $\Phi_1$ , entonces  $\forall f \in [0,1]^{k*}$ , se satisface que  $\Phi_2(f_0) \leq \Phi_2(f) \leq \Phi_2(f_{polar})$  ya que ambas medidas ordenan igual.

2)  $\Rightarrow$  Sea  $\Phi_1$  una medida de dispersión que satisface las condiciones de frontera uniformes o de spread. Entonces se satisface que  $\Phi_1(f_0) \leq \Phi_1(f) \leq \Phi_1(f_{uniforme})$   $\forall f \in [0,1]^{k*}$ , con  $f_0 = (f_1, f_2, \dots, f_k) \in [0,1]^{k*}$  en el que  $\exists i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $f_i = 1$  y  $f_{uniforme} = (1/k, 1/k, \dots, 1/k)$  el vector uniforme (Definición 3.4).

$\Leftarrow$  Sea  $\Phi_2$  una medida de dispersión equivalente a  $\Phi_1$ , entonces  $\forall f \in [0,1]^{k*}$ , se satisface que  $\Phi_2(f_0) \leq \Phi_2(f) \leq \Phi_2(f_{uniforme})$  ya que ambas medidas ordenan igual.

d) Propiedad 3.5 - Mitosis

$\Rightarrow$  Sea  $\Phi_1$  una medida de dispersión que satisface 3.5. Entonces  $\forall f \in [0,1]^{k*}$  se cumple que  $\Phi_1(f) \leq \Phi_1(f')$  con  $f'$  dado en la Definición 3.8. Como  $\Phi_1 \sim \Phi_2$  se cumple que  $\Phi_2(f) \leq \Phi_2(f')$  y por tanto  $\Phi_2$  satisface 3.5.

$\Leftarrow$  Idem.



e) Propiedad 3.7 - Invarianza frente a traslaciones

$\Rightarrow$  Sea  $\Phi_1$  una medida de dispersión que satisface 3.7, entonces  $\forall f \in [0,1]^{k*}$  con  $f_j = 0 \quad \forall j \in \{k-a+1, \dots, k\}$  se tiene que  $\Phi_1(f) = \Phi_1(f^{(a)})$  donde  $f^{(a)}$  es el vector resultado de una traslación de "a" posiciones en el vector (Definición 3.10). De manera trivial puede demostrarse que si  $\Phi_2$  es una medida de dispersión equivalente a  $\Phi_1$ , debe satisfacerse que  $\Phi_2(f) = \Phi_2(f^{(a)})$  por el Lema 3.1.

$\Leftarrow$  Idem.

f) Propiedad 3.8 - Invarianza frente a permutaciones

$\Rightarrow$  Sea  $\Phi_1$  una medida de dispersión que satisface 3.8. Entonces,  $\forall \Pi$  permutación y  $\forall f \in [0,1]^{k*}$  se cumple que  $\Phi_1(f) = \Phi_1(\Pi(f))$ . Por el Lema 3.1 se tiene que si  $\Phi_2$  es una medida de dispersión equivalente a  $\Phi_1$ , debe satisfacerse que  $\Phi_2(f) = \Phi_2(\Pi(f))$ .

$\Leftarrow$  Idem.

g) Propiedad 3.9 - Invarianza frente a distribuciones complementarias

$\Rightarrow$  Sea  $\Phi_1$  una medida de dispersión que satisface 3.9. Entonces  $\forall f \in [0,1]^{k*}$  se cumple que  $\Phi_1(f) = \Phi_1(f')$  siendo  $f'$  la distribución complementaria (Definición 3.13). Por el Lema 3.1 se tiene que si  $\Phi_2$  es una medida de dispersión equivalente a  $\Phi_1$ , entonces debe satisfacerse que  $\Phi_2(f) = \Phi_2(f')$ .

$\Leftarrow$  Idem.

h) Propiedad 3.11 - Independencia a valores extremos en situaciones simétricas

$\Rightarrow$  Sea  $\Phi_1$  una medida de dispersión que satisface 3.11. Entonces  $\forall f \in [0,1]^{k*}$  se cumple que  $\Phi_1(f) = \Phi_1(f^\alpha)$  siendo  $f^\alpha$  el vector dado en la Definición 3.15. Por el Lema 3.1 se tiene que si  $\Phi_2$  es una medida de dispersión equivalente a  $\Phi_1$ , entonces debe satisfacerse que  $\Phi_2(f) = \Phi_2(f^\alpha)$ .

### Observación 3.5

Obsérvese que dos medidas equivalentes no tienen necesariamente que satisfacer las propiedades 3.6 y 3.10.

### ***3.14 Equivalencia de las medidas de dispersión existentes para variables ordinales***

A continuación se analizará la relación de equivalencia entre las medidas estudiadas en el capítulo anterior. Para ello, se comenzará viendo un ejemplo y posteriormente se pasará a demostrar las diferentes relaciones de equivalencia.

#### Ejemplo 3.5:

La Tabla 3.3 muestra cinco vectores de frecuencias relativas de respuestas dadas a una variable estadística ordinal con respuestas en una escala de Likert de 5 categorías:

EJEMPLOS	<i>MD</i>	<i>D</i>	<i>N</i>	<i>A</i>	<i>MA</i>
Ej.1	0%	32%	16%	53%	0%
Ej.2	0%	0%	5%	50%	45%
Ej.3	7%	7%	33%	50%	3%
Ej.4	3%	0%	0%	11%	86%
Ej.5	83%	4%	4%	8%	0%

Tabla 3.3 - Ejemplo 3.5 Frecuencias relativas de 5 vectores en una escala de Likert

La representación gráfica de los ejemplos anteriores es la siguiente:

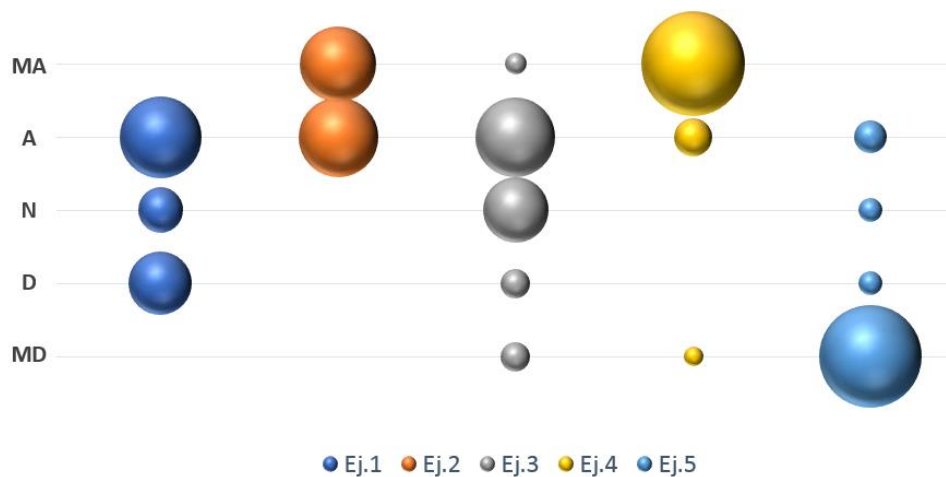


Figura 3.1 – Representación gráfica de los vectores de frecuencias relativas del Ejemplo 3.5

A continuación se muestran las medidas cuantitativas del capítulo 2 aplicadas a estos vectores del ejemplo (de nuevo las medidas  $(1-l^2)$  con la distancia euclídea y de Manhattan y la medida de variación total  $V_T$  han sido excluidas del análisis dada su relación directa con el resto de las medidas, ver Observación 2.8 y Observación 2.9):

EJEMPLOS	LOV	IOV <sub>indpteN</sub>	COV	Dsn	H
Ej. 1	0.39	0.47	0.27	0.34	1.43
Ej. 2	0.25	0.3	0.16	0.21	1.23
Ej. 3	0.35	0.46	0.26	0.32	1.71
Ej. 4	0.11	0.2	0.11	0.22	0.68
Ej. 5	0.19	0.32	0.18	0.29	0.9

Tabla 3.4 - Dispersión de los vectores del Ejemplo 3.5 con las medidas del capítulo 2

Teniendo en cuenta la dispersión de cada ejemplo con cada medida, a continuación se muestra el ranking de los ejemplos ordenados de mayor a menor dispersión indicando en color cuando el orden difiere entre ellos:

	LOV	IOV <sub>indpteN</sub>	COV	Dsn	H
Mayor Dispersión	1	1	1	1	3
	3	3	3	3	1
	2	5	5	5	2
	5	2	2	4	5
Menor Dispersión	4	4	4	2	4

Tabla 3.5 - Ejemplos ordenados decrecientemente según su dispersión con cada medida

Puede apreciarse que la ordenación es bastante similar en todas las medidas excepto en la entropía ( $H$ ) lo que es lógico ya que la entropía es una medida de dispersión propia de variables nominales.

Para las medidas restantes puede apreciarse que IOV<sub>indpteN</sub> y COV ordenan los ejemplos de manera similar (dado que son medidas equivalentes, como se demostrará en la Proposición 3.41). El LOV y el Dsn presentan diferencias en la manera de ordenar los ejemplos por lo que no son medidas equivalentes ni entre ellas ni con la clase de las medidas IOV<sub>indpteN</sub> y COV.

### Proposición 3.41

Las medidas IOV<sub>indpteN</sub> y COV son equivalentes.

*Demostración:* Como  $COV = 1 - \sqrt{1 - IOV_{indpteN}}$ , se trata de una transformación biyectiva estrictamente creciente del IOV<sub>indpteN</sub> y por tanto se cumple que son equivalentes.  $\square$

### Proposición 3.42

El LOV no es equivalente ni a IOV<sub>indpteN</sub> ni a COV.

*Demostración:* El Ejemplo 3.5 muestra un contraejemplo.  $\square$

### Proposición 3.43

La entropía  $H$  no es equivalente a LOV, IOV<sub>indpteN</sub> ni a COV.

*Demostración:* El Ejemplo 3.5 muestra un contraejemplo.  $\square$

### **Proposición 3.44**

El  $D_{sn}$  no es equivalente a  $LOV$ ,  $IOV_{indpteN}$ ,  $COV$ , ni a la entropía  $H$ .

*Demostración:* El Ejemplo 3.5 muestra un contraejemplo. □

### **3.15 Conclusiones sobre la clasificación de medidas existentes**

Las propiedades definidas a lo largo de este capítulo y el análisis de las mismas sobre cada una de las medidas existentes en la literatura, permiten clasificar de manera unívoca las medidas de dispersión ordinal encontradas hasta la fecha. La relación de equivalencia introducida permite agrupar las medidas.

En principio las medidas consideran equidistancia entre las categorías de la escala subyacente; bajo esta hipótesis, los análisis anteriores llevan a pensar que la medida de  $IOV_{indpteN}$  sería la mejor medida en términos de propiedades analíticas e interpretativas.

Por otra parte, el  $D_{sn}$  o disenso de Tastle y Wierman (2007) es una medida que propone un enfoque conceptual diferente e interesante ya que puede entenderse como trasladar el concepto de varianza en variables continuas a variables ordinales, puesto que utiliza una transformación de la distancia a la media con una formulación parecida a la entropía, propia de variables cualitativas. Presenta no obstante algunos problemas ya que al utilizar una formulación similar a la entropía, los resultados dejan de ser fácilmente interpretables y es más complejo a nivel analítico. Además en el cálculo del disenso, Tastle y Wierman (2007) realizan operaciones propias de variables continuas que no están definidas en un entorno ordinal.

## **4 Generalización de las medidas de dispersión para variables ordinales**

En este capítulo se propondrá un enfoque general de las medidas presentadas anteriormente y se estudiarán en profundidad los elementos que lo integran. Teniendo en cuenta las conclusiones del capítulo anterior (3.15), serán generalizaciones a partir de las medidas  $IOV_{indpteN}$  y  $D_{sn}$ . Se estudiará además la relación entre esta generalización y las medidas existentes.

### ***4.1 Enfoque general de las medidas existentes***

Tras el análisis realizado en los capítulos anteriores sobre las medidas de dispersión de variables ordinales encontradas hasta el momento y sus propiedades, se pueden agrupar la mayoría de ellas en dos bloques según el enfoque conceptual que utilicen.

Por una parte están aquellas que miden la discrepancia media entre dos observaciones escogidas al azar ( $IOV_{indpteN}$  y  $COV$ ). Estas medidas se basan fundamentalmente en los productos de las frecuencias de las categorías dos a dos ponderados por una medida de distancia entre ellas. Este enfoque podría entenderse como una manera natural de definir el GMD (Gini Mean difference) en un contexto ordinal (Yitzhaki, 1998; Yitzhaki, 2003; Giorgi, 2005).

Por otra parte, existe un segundo enfoque formado por las medidas que miden la concentración en torno a un punto de referencia, es decir aquellas que calculan distancia media de todas las observaciones a un punto de referencia. Este es el caso del Disenso de Tastle y Wierman (2007) ( $D_{sn}$ ) que se basa en una idea similar a la varianza de datos cuantitativos ya que se calcula como el promedio de una función de distancias relativas a un punto de referencia ponderadas por un peso.

Las medidas de Franceschini *et al.* (2004) y de García-Lapresta y Borge (2018), dada su naturaleza cualitativa, no pertenecen a ninguno de estos dos

grupos. Finalmente, aunque a priori la formulación de la medida LOV no se asemeja a ninguno de los dos enfoques planteados, demostraremos en la sección 4.3 una formulación equivalente que permite incluirla en el segundo grupo de medidas.

#### Ejemplo 4.1

Si las observaciones fuesen la ciudad de residencia de cada individuo, el primer tipo de medidas, que mide la discrepancia media de dos observaciones escogidas al azar, calcularía la distancia entre las ciudades de cada par de individuos elegidos de forma aleatoria de forma que el peso de ciudades con mayor población les asignaría una probabilidad mayor. El segundo tipo de medidas, que mide la discrepancia media a un punto de referencia, calcularía en cambio la distancia de cada individuo a un punto de referencia, que podría tomarse como el centro geográfico en este caso, asignando también como peso la probabilidad de la población del individuo.

Antes de poder presentar en esta memoria una formulación general sobre las diferentes medidas cuantitativas de dispersión ordinal, es necesario realizar las siguientes dos observaciones:

#### **Observación 4.1**

Obsérvese que las medidas de dispersión ordinal clasificadas en el primer

grupo ( $IOV_{\text{indpteN}}$  y  $COV$ ) pueden reescribirse como  $D(f) = h \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k f_i f_j \text{disc}(i, j) \right)$ ,

donde  $h$  es una función monótona creciente y  $\text{disc}$  es una función en  $\mathbb{R}^+$  que recoge la diferencia o discrepancia entre las categorías.

Así se tiene por ejemplo que  $IOV_{\text{indpteN}}$  puede escribirse como  $\Phi_{\text{disc}}$  con  $h(x) = \frac{4}{(k-1)}(x)$  y  $\text{disc}(i, j) = |j - i|$ . Conviene notar que si  $h(x) = x$  es fácil ver que se tiene la medida  $V_T$  (Gadrich *et al.*, 2015).

De manera análoga, siendo  $h$  y  $\text{disc}$  las funciones descritas anteriormente, las medidas definidas en el segundo grupo ( $D_{\text{sn}}$ ) pueden expresarse como

$D_r(f) = h\left(\sum_{i=1}^k f_i \text{disc}(i, r)\right)$ , donde  $r$  es el punto de referencia en torno al cual se calcula la dispersión y se obtiene a partir del vector de frecuencias  $f$ .

## Observación 4.2

Obsérvese por otro lado que las dos expresiones anteriores asumen la posibilidad de definir una diferencia o discrepancia entre las categorías (*disc*), lo que no siempre es fácil cuando se está tratando con etiquetas de una variable ordinal. En particular, en Franceschini *et al.* (2004) se detecta y analiza este problema de la atribución de una medida de distancia entre las categorías de una variable ordinal, cuyas características son exclusivamente el orden de las categorías. Para ello muestra el siguiente ejemplo:

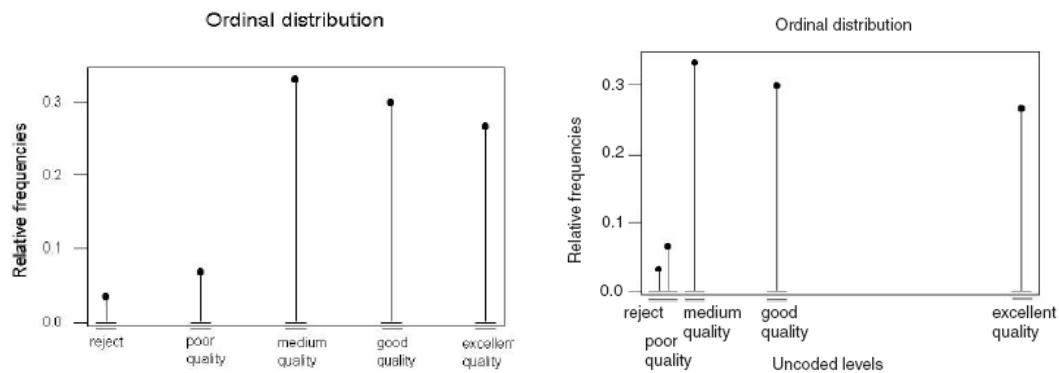


Figura 4.1 – Ejemplo de distribución de una variable ordinal donde el concepto de distancia no está definido (Franceschini *et al.*, 2004)

El autor trata de resolverlo definiendo la medida cualitativa mencionada en el capítulo 2, de forma que no le atribuya propiedades que la variable ordinal no posee. Esta solución, si bien correcta, es poco práctica dado que limita excesivamente cualquier tipo de análisis de la variable. Otros autores han continuado en esta línea de investigación (ver García-Lapresta y Borge, 2018).

Como ya se ha mencionado, la mayoría de los autores resuelven este problema asignando distancias entre los órdenes de las categorías, es decir, transformando la variable ordinal en una variable cuantitativa discreta. Al hacer esto, están atribuyendo propiedades no presentes en la escala original. Por ejemplo, este tipo de transformación permite entender que en una escala



de Likert de 5 categorías la diferencia entre la categoría "Muy de Acuerdo" y "Neutro" es la misma que el salto de la categoría "Acuerdo" a "Desacuerdo", algo que teniendo en cuenta el cambio de opinión que subyace en el segundo salto no parece cierto. Es decir, intuitivamente no es cierto que  $disc(1,3) = disc(2,4)$ . Además, se está suponiendo una linealidad que no tiene por qué cumplirse. Por ejemplo, al asignar valores a la siguiente escala de valoración de películas {"Obra Maestra", "Muy Buena", "Buena", "Regular", "Mala"} se está suponiendo la que la distancia de "Buena" a "Mala" equivale al doble de la distancia de "Obra Maestra" a "Muy buena", algo que de nuevo no refleja la intuición natural de las etiquetas.

No existe por tanto una distancia definida entre las categorías de las escalas ordinales y por tanto no pueden realizarse operaciones aritméticas con las categorías o equivalentemente con los órdenes de las categorías. Por esta razón, al calcular la dispersión de una variable estadística ordinal sólo tendría sentido considerar las discrepancias entre las categorías existentes en la escala.

Todo lo anterior tiene dos implicaciones directas sobre la Observación 4.1:

- La función *disc* debe interpretarse por tanto como una matriz de diferencias que representa las posibles discrepancias entre las etiquetas de la variable ordinal.
- El valor de referencia en el segundo enfoque presentado debe ser una categoría de la variable ordinal ya que ni las etiquetas ni los órdenes de las variables ordinales permiten realizar ninguna operación para calcular otro valor.

Por estos motivos en esta memoria se proponen dos familias de medidas  $\Phi_w$  y  $\Phi_{w, \text{ref}}$  en función de la naturaleza de la medida de dispersión. Se buscará que permitan recoger la escala ordinal con las posibles tendencias subyacentes (por ejemplo las mencionadas anteriormente: Likert, escala de valoración de cine, etc).

Teniendo en cuenta la Observación 4.2, la propuesta del primer enfoque de las medidas de dispersión, una medida basada principalmente en los productos de las frecuencias de las categorías dos a dos ponderados por una medida de discrepancia entre ellas, puede expresarse del siguiente modo:

**Definición 4.1 – Medida de dispersión sin referencia para variables ordinales ( $\Phi_W$ )**

Sea  $X$  una variable estadística ordinal que toma valores en el conjunto de categorías  $Ax = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  o de forma equivalente en el conjunto de órdenes de las categorías  $Lx = \{1, 2, \dots, k\}$ . Dada una matriz de diferencias  $W$  de dimensiones  $k \times k$  tal que  $w_{ij}$  denota la discrepancia entre la categoría  $a_i$  y la categoría  $a_j$ , o equivalentemente entre los órdenes asociados  $l_i$  y  $l_j$ , y dada  $h$ , función monótona creciente con  $h(0) = 0$ , se define la siguiente medida de dispersión:

$$\Phi_W: [0,1]^{k*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \Phi_W(f) = h \left( \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k f_i f_j w_{ij} \right).$$

El segundo tipo de medidas de dispersión, definido a partir de la diferencia media ponderada de todas las observaciones a un punto de referencia de la escala, puede expresarse de forma muy similar al primero teniendo en cuenta las discrepancias de cada categoría a la categoría de referencia:

**Definición 4.2 – Medida de dispersión con referencia ( $\Phi_{W,lref}$ )**

Sea  $X$  una variable estadística ordinal que toma valores en el conjunto de categorías  $Ax = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  o de forma equivalente en el conjunto de órdenes de las categorías  $Lx = \{1, 2, \dots, k\}$ . Dada una matriz de diferencias  $W$  de dimensiones  $k \times k$  tal que  $w_{ij}$  denota la discrepancia entre la categoría  $a_i$  y la categoría  $a_j$ , o equivalentemente entre los órdenes asociados  $l_i$  y  $l_j$  y sea  $h$  una función monótona creciente, con  $h(0) = 0$ , se define la siguiente medida de dispersión:

$$\Phi_{W,lref}: [0,1]^{k*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \rightarrow \Phi_{W,lref}(f) = h \left( \sum_{i=1}^k f_i w_{ilref} \right),$$

donde  $lref$  es una medida de tendencia central que toma un único valor que coincide con el orden de una categoría de la escala ( $a_{ref} \in Ax$ ,  $l_{ref} \in Lx$ ) y es obtenida a partir de la distribución de frecuencias  $f$ .

Teniendo en cuenta Observación 4.2 y el análisis de las posibles medidas de tendencia central visto en 2.1.1, en esta memoria trabajaremos con la mediana única  $Med_u$  (ver Definición 2.4) como medida de tendencia central y denotaremos a dicha medida de dispersión por  $\Phi_{W,Med_u}$ .

### Observación 4.3

Nótese que podríamos haber escogido la moda como medida de tendencia central forzando la unicidad al valor más alto o bajo por ejemplo. No obstante, es bien conocido el problema de robustez de la moda como medida de tendencia central tal y como se muestra en el siguiente ejemplo:

Sean los vectores  $f = (0.34, 0.33, 0, 0, 0.33)$  y  $g = (0.33, 0.33, 0, 0, 0.34)$  cuya diferencia es mínima  $f - g = (0.01, 0, 0, 0, -0.01)$ .

Se tiene que  $Moda(f) = 1$  y  $Moda(g) = 5$  y la dispersión viene dada por:

$$\Phi_{||, Moda}(f) = 1*0.33 + 4*0.33 = 1.65.$$

$$\Phi_{||, Moda}(g) = 4*0.33 + 3*0.33 = 2.31.$$

La discrepancia media respecto al valor de referencia en el vector  $f$  es de 1.65 mientras que para  $g$  es de 2.31. Esto supone más de medio punto de diferencia en la dispersión en una escala de 5 categorías donde la discrepancia máxima entre categorías es 4.

Esto se debe a que, a pesar de la similaridad de los vectores  $f$  y  $g$ , al calcular la dispersión respecto a la moda en el vector  $f$ , un tercio de la población dista 4 categorías de la referencia y otro tercio tan sólo una categoría. En el vector

g en cambio, dos tercios de la población distan 4 ó 3 categorías, por lo que la dispersión es mucho mayor.

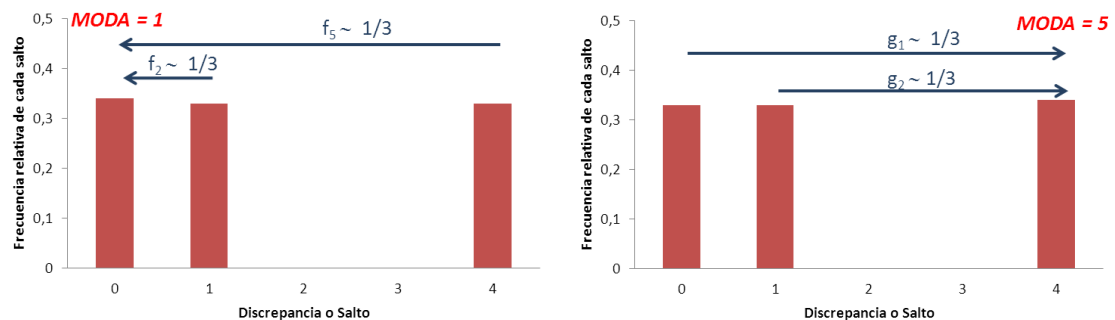


Figura 4.2 – Explicación gráfica de la Observación 4.3

## 4.2 Interpretación de las medidas propuestas

La matriz de diferencias  $W$  representa las posibles discrepancias las categorías asociadas a cada par de observaciones. Es decir, define la “distancia” o los “saltos” entre cualesquiera dos categorías.

Así, la medida de dispersión con referencia  $\Phi_{W, Med\_u}$  que se propone, podría interpretarse como la agregación de una variable estadística discreta que toma valores  $w_{iMed\_u}$  para cada categoría  $i$  con frecuencia  $f_i$ .

### Ejemplo 4.2:

Sea  $f = (0.55, 0.2, 0.10, 0, 0.15)$ . Sea  $w_{ij} = |i - j|$ . Se tiene que  $Med\_u(f) = 1$ . Por tanto, en este caso se medirá la discrepancia de cada categoría a la primera categoría. Podría considerarse la variable aleatoria que toma valores 0 (el salto de la categoría 1 a la 1), 1, 2, 3 ó 4 (salto de la categoría 5 a la categoría 1) con la probabilidad definida por la frecuencia relativa del vector  $f$ .

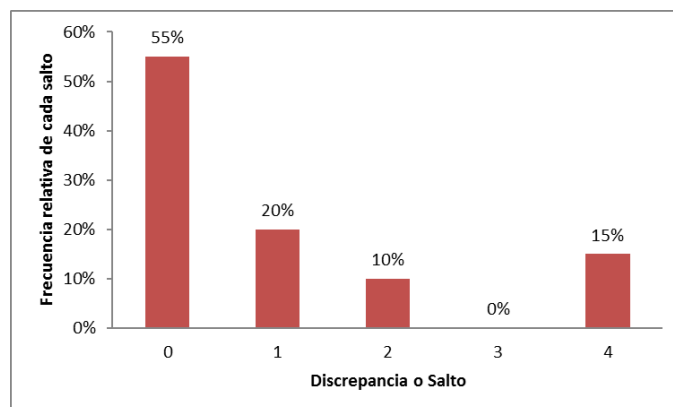


Figura 4.3 –Frecuencia relativa de los saltos del Ejemplo 4.2

### Definición 4.3 – Variable estadística discreta asociada a una medida de dispersión con referencia

Sea  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  una variable estadística ordinal que toma valores en el conjunto de categorías  $Ax = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  o de forma equivalente en el conjunto de órdenes de las categorías  $Lx = \{1, 2, \dots, k\}$  y sea  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  el vector de frecuencias relativas asociadas a  $X$ . Dada  $W$  una matriz de diferencias y  $l_{ref}$  el orden de la categoría de referencia. Sea  $D = \{w_{ilref} \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$ . Se define entonces la variable estadística  $\bar{d}$  que toma valores en el conjunto  $D$  con frecuencias  $f_i$ .

$$\bar{d} : D \rightarrow [0,1]$$

$$w_{ilMed\_u} \rightarrow \bar{d}(w_{ilref}) = f_i.$$

### Observación 4.4

$$\bar{d} = \Phi_{W, Med\_u}.$$

### Definición 4.4 – Variable estadística discreta asociada a una medida de dispersión sin referencia

Sea  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  una variable estadística ordinal que toma valores en el conjunto de categorías  $Ax = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  o de forma equivalente en el conjunto de órdenes de las categorías  $Lx = \{1, 2, \dots, k\}$  y sea  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  el vector de frecuencias relativas asociadas a  $X$ . Sea  $W$  una matriz de

diferencias. Sea  $D = \{d_r = w_{ij} \mid i, j \in \{1, \dots, k\}, r \in \{1, \dots, k \times k\}\}$ . Se define entonces la variable estadística  $\bar{d}$  que toma valores en el conjunto  $D$  con frecuencias

$$g_r = \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, k\} \\ \text{con } w_{ij} = d_r}} f_i f_j .$$

$$\bar{d} : D \rightarrow [0, 1]$$

$$d_r \rightarrow \bar{d}(d_r) = g_r = \sum_{\substack{i, j \in \{1, \dots, k\} \\ \text{con } w_{ij} = d_r}} f_i f_j .$$

#### Observación 4.5

$$\bar{d} = \Phi_W.$$

### 4.3 Relación entre las medidas propuestas y las medidas existentes

En esta sección se estudiará la relación entre las medidas propuestas y las medidas cuantitativas presentadas en el capítulo 2.

No se considerarán en este análisis las medidas de dispersión cualitativas (medida de Franceschini *et al.*, 2004, ni la medida de García-Lapresta y Borge, 2018) ni aquellas medidas que aglutinan las anteriores (ver Observación 2.8 y Observación 2.9). Se analizará por tanto la relación de LOV (Leik, 1966), IOV (Berry y Mielke, 1992), COV (Kvalseth, 1995) y Dsn (Tastle y Wierman, 2007) con las medidas propuestas anteriormente.

En primer lugar se analizarán las medidas de dispersión sin referencia.

#### Proposición 4.1

Sea  $X$  una variable estadística ordinal que toma valores en el conjunto de categorías  $Ax = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  o de forma equivalente en el conjunto de órdenes de las categorías  $Lx = \{1, 2, \dots, k\}$  y sea  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  el vector de frecuencias

relativas asociadas a  $X$ . Sea  $W$  una matriz de diferencias de dimensiones  $k \times k$  tal que  $w_{ij}$  denota la discrepancia entre la categoría  $a_i$  y la categoría  $a_j$ , o equivalentemente entre los órdenes asociados  $l_i$  y  $l_j$ . Se cumple que la medida de dispersión  $\Phi_W$  con  $w_{ij} = |j - i|$  (que se notará como  $\Phi_{| \cdot |}$ ) es equivalente a las medidas  $IOV_{\text{indpteN}}$  y  $COV$ .

*Demostración:* El Índice de Variación Ordinal ( $IOV_{\text{indpteN}}$ ) y el Coeficiente de Variación Ordinal ( $COV$ ) son transformaciones biyectivas estrictamente crecientes de  $\Phi_{| \cdot |}$ , por tanto ordenan la dispersión de cualesquiera dos variables estadísticas ordinales de la misma manera y se cumple que son equivalentes.  $\square$

Para el análisis de las medidas de dispersión con referencia, se analizará la relación con el Dsn (Tastle y Wierman, 2007) que establece distancias entre cada categoría y el valor de referencia. El problema es que el valor de referencia no es necesariamente un valor de la escala ordinal, es decir, los autores no tienen en cuenta la problemática explicada en la Observación 4.2 sobre la medición de la distancia entre las categorías de una variable ordinal y las operaciones permitidas entre los órdenes de la misma. Por esta razón, esta medida no puede ser una particularización de  $\Phi_{W, l_{\text{ref}}}$  (Definición 4.2). Sí es en cambio una particularización de  $D_r(f) = h\left(\sum_{i=1}^k f_i \text{disc}(i, r)\right)$  (ver Observación 4.1):

#### **Proposición 4.2**

Dsn o el disenso de Tastle y Wierman (2007) aplicado a una variable estadística discreta  $X$  con  $k$  categorías  $Ax = \{l_1, \dots, l_k\}$ ,  $l_i \in \mathbb{R}$  y  $l_i < l_j \forall i < j$  (recodificación necesaria de una variable estadística ordinal genérica, ver Definición 2.14) es una particularización de la medida de dispersión  $D_r$

tomando como  $\text{disc}(i, r) = -\log_2\left(1 - \frac{|l_i - r|}{l_{\max} - l_{\min}}\right)$  y  $r = \mu(f) = \sum_{i=1}^k f_i l_i$ .

*Demostración:* Trivial.  $\square$

Quedaría pendiente la relación con el LOV que se presenta a continuación:

### Teorema 4.1

La medida de dispersión  $\Phi_{W,lref}$  tomando como valor de referencia la mediana única (ver Definición 2.4) y como diferencia el valor absoluto ( $\Phi_{|l,Med_u}$ ) es proporcional al LOV (Leik, 1966).

*Demostración:* Teniendo en cuenta la Observación 2.3 se tiene que LOV puede ser expresado como:

$$LOV(f) = \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^k d_i(f),$$

$$\text{donde} \quad d: \quad [0, 1]^{k*} \quad \rightarrow \quad [0, 1]$$

$$f \quad \rightarrow \quad d(f),$$

$$\text{con} \quad d_i(f) = \begin{cases} F_i = \sum_{r=1}^i f_r & \text{si } F_i = \sum_{r=1}^i f_r \leq 1/2, \\ 1 - F_i = 1 - \sum_{r=1}^i f_r & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Supongamos  $j \in \{1, \dots, k\}$  con  $F_j > 1/2$  y  $F_i \leq 1/2 \quad \forall i \in \{1, \dots, j-1\}$ , entonces:

$$\begin{aligned} LOV(f) &= \frac{2}{(k-1)} \sum_{i=1}^k d_i(f) = \frac{2}{(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^{j-1} d_i(f) + \sum_{i=j}^k d_i(f) \right] = \\ &= \frac{2}{(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{r=1}^i f_r + \sum_{i=j}^k (1 - \sum_{r=1}^i f_r) \right] = \frac{2}{(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{r=1}^i f_r + \sum_{i=j}^{k-1} \sum_{r=i+1}^k f_r \right] = \\ &= \frac{2}{(k-1)} [[f_1 + (f_1 + f_2) + \dots + (f_1 + f_2 + \dots + f_{j-1})] + [(f_{j+1} + f_{j+2} + \dots + f_k) + (f_{j+2} + \dots + f_k) \\ &+ \dots + f_k]] = \end{aligned}$$



$$= \frac{2}{(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^{j-1} (j-i)f_i + \sum_{i=j+1}^k (i-j)f_i \right] = \frac{2}{(k-1)} \left[ \sum_{i=1}^k |i-j| f_i \right] = \frac{2}{(k-1)} \Phi_{||,j}(f) \stackrel{(1)}{=}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{2}{(k-1)} \Phi_{||, \text{Med}_u}(f).$$

(1) La última igualdad se cumple ya que utilizando la Definición 2.4, el valor  $j$  que define el cambio en la función  $d_i$  del LOV es la mediana única del conjunto de datos.

Así se tiene que LOV es igual a  $\Phi_{||, \text{Med}_u}$  multiplicada por una constante y por tanto son medidas proporcionales.  $\square$

#### Observación 4.6

Hay que notar que si por un momento consideráramos la variable estadística ordinal como una variable continua y se tuviese una distribución cuya mediana única coincidiese con la media y fuera una de las categorías de la escala, el LOV sería la misma medida que la desviación media ( $D_m(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}|$ ).

Es decir, la primera medida ordinal encontrada en la literatura, propuesta en 1966, es muy similar a la desviación media y puede por tanto interpretarse como la distancia media con respecto a la medida central de la distribución, entendiendo como medida central la mediana única.

A continuación se presenta un resumen de las equivalencias encontradas entre las medidas de dispersión propuestas  $\Phi_W$  y  $\Phi_{W, \text{lref}}$  y las medidas de dispersión del capítulo 2:

$\Phi_{  } \sim \text{IOV}_{\text{indpteN}} \sim \text{COV}$
$\Phi_{  , \text{Med}_u} \sim \text{LOV}$

## 5 Análisis paramétrico de las diferencias entre categorías de una variable ordinal

En este capítulo se presentarán las hipótesis y propiedades que debe cumplir la matriz de diferencias  $W$ , incluyendo el caso particular de escalas ordinales con clases. A continuación incluimos una propuesta para el cálculo de la matriz de forma semi-automática en función de un vector de parámetros y estudiaremos si las medidas resultantes del uso de esta matriz verifican las diferentes propiedades presentadas en el capítulo 3.

### 5.1 Hipótesis sobre la matriz de diferencias $W$

En esta sección se definen ciertas propiedades de la matriz  $W$  de las medidas de dispersión propuestas, que representa las diferencias entre las categorías de una variable estadística ordinal. Se muestran además ciertas propiedades deseables que se verifican a menudo.

#### 5.1.1 No negatividad

Como medida de distancia, la matriz  $W$  debe verificar que  $W(l_i, l_j) \geq 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

#### 5.1.2 Distancia nula

La matriz  $W$  debe cumplir que  $W(l_i, l_i) = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

#### 5.1.3 Concordancia entre categorías

Esta propiedad refleja algo que intuitivamente es claro: fijando una categoría, el peso o distancia de las categorías restantes a la categoría fijada debe aumentar a medida que se toman categorías más alejadas. Una matriz de diferencias  $W$  en escalas ordinales debe satisfacer esta propiedad.

### **Definición 5.1 – Propiedad de concordancia entre categorías**

Sea  $W$  una matriz de diferencias de dimensiones  $k \times k$ , se dice que  $W$  satisface la propiedad de concordancia entre categorías si se cumple que:

$$|j - i| \leq |j' - i| \Leftrightarrow w_{ij} \leq w_{ij'} \quad \forall i, j, j' \in \{1, \dots, k\}.$$

#### **5.1.4 Simetría**

Con frecuencia, la matriz  $W$  cumple propiedad de simetría:  $W(l_i, l_j) = W(l_j, l_i)$   $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

Conviene notar que aunque intuitivamente se trata de una matriz simétrica, el conocimiento experto o posibles investigaciones abren la posibilidad de que la distancia varíe en función de si se mide en un sentido o en el sentido inverso. Según el contexto podría suceder, por ejemplo, que en una escala de Likert el cambio hacia el acuerdo sea más “fácil” que hacia el desacuerdo y por tanto habría menos distancia o ponderación. Así la distancia de “Neutro” (3) a “Muy de Acuerdo” (5) sería inferior que la distancia de “Muy de Acuerdo” a “Neutro”  $W(3,5) < W(5,3)$ .

### **Observación 5.1**

Nótese que si la matriz  $W$  es simétrica, se cumple que  $w_{ij} = w_{ji}$  y entonces se cumple que la medida de dispersión sin referencia  $\Phi_W$  verifica la siguiente relación:

$$\Phi_W(f) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^k f_i f_j w_{ij} = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^k f_i f_j w_{ij}.$$

## **5.2 Matriz de diferencias en escalas ordinales con clases**

Una escala ordinal puede presentar clases, es decir, sus categorías pueden particionarse en grupos o clases. Por ejemplo, en general, una escala de Likert está particionada en tres clases: la clase de la actitud positiva, la de actitud negativa y la clase de actitud neutra que generalmente coincide con

una única categoría, la categoría central. Las escalas de Likert son un ejemplo muy habitual de escala ordinal, no obstante, cualquier escala ordinal podría agrupar sus categorías en clases. Por ejemplo, las categorías en las que la agencia de rating Standard & Poor's califica las empresas a largo plazo. La escala es:  $Ax = \{AAA, AA+, AA, AA-, A+, A, A-, BBB+, BBB, BBB-, BB+, BB, BB-, B+, B, B-, CCC+, CCC, CCC-, CC, C, D\}$  y presenta 4 clases  $\{A\}$ ,  $\{B\}$ ,  $\{C\}$  y  $\{D\}$ , cada una de ellas conteniendo las categorías que comienzan con su letra.

Las clases asociadas a una escala ordinal pueden suponer un problema en la hipótesis de equidistancia entre etiquetas y también en la posibilidad de representar o de asignar a cada etiqueta un valor numérico en  $\mathbb{R}$  para obtener la discrepancia entre las etiquetas. Esta problemática es mencionada por algunos autores en el marco de las escalas de Likert (Cohen, Manion y Morrison, 2002; Lalla, Facchinetti y Mastroleo, 2005; Duncan y Stenbeck, 1987; Brody y Dietz, 1997; Oppenheim, 2000) o en estudios sobre medición de magnitudes y problemas de decisión multicriterio (Jaffe-Katz, Budescu y Wallsten, 1989; Oppenheim, 2000; Gómez, Montero y Yáñez, 2005).

A continuación presentamos algunos conceptos de escalas ordinales con clases asociadas y algunos ejemplos en los que se pone de manifiesto la problemática mencionada anteriormente:

### **Definición 5.2 – Escala genérica de Likert**

Diremos que una escala ordinal de  $k$  categorías es una escala genérica de Likert cuando el conjunto de categorías  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  en las que toma valores especifican el nivel de acuerdo o desacuerdo con una declaración y las categorías de respuesta de esta escala se particionan en 3 clases:

Clase del Desacuerdo:  $C^-$

Clase Neutra:  $C^N$

Clase del Acuerdo:  $C^+$

Se cumple que  $A = C^- \cup C^N \cup C^+$ .

### **Definición 5.3 – Escala tradicional de Likert**

Diremos que una escala de Likert es tradicional cuando el número de categorías en  $C^-$  es el mismo que el número de categorías en  $C^+$  (es decir, se cumple que:  $|C^-| = |C^+|$ ).

### **Definición 5.4 – Escala ordinal con s clases**

Sea  $Ax = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  una escala ordinal y  $Lx = \{1, 2, \dots, k\}$  el conjunto de órdenes de las categorías. Se dice que  $A$  es una escala ordinal con  $s$  clases cuando  $Ax = \{C^1, \dots, C^s\}$  es una partición de las categorías de las clases. De igual manera, el conjunto de órdenes  $Lx$  se puede particionar en  $s$  clases de la siguiente manera:  $Lx = \{\{1=r_1, \dots, r_2-1\}, \{r_2, \dots, r_3-1\}, \dots, \{r_s, \dots, k\}\}$ .

Intuitivamente, en una escala de Likert de 5 puntos, la distancia de “Muy en Desacuerdo” a “Neutro” es menor que la distancia de “Desacuerdo” a “Acuerdo” (aunque en ambos casos el salto sea de dos categorías), ya que el segundo se produce un cambio de opinión. De la misma manera, parece que no es lo mismo que una empresa baje 6 categorías en la escala de Standard & Poors cuando baja de BBB a B que cuando baja de B a C.

La matriz de diferencias debería recoger esta estructura de la escala ordinal, debería penalizar de alguna manera el hecho de que haya un cambio de clase. Es decir, intuitivamente en el ejemplo de la escala de Likert la matriz de diferencias debería verificar que  $W(MD, N) < W(D, A)$  y en el caso de Standard & Poors debería cumplirse que  $W(BBB, B) < W(B, C)$ .

Por tanto, cuando una escala ordinal presenta clases subyacentes, la matriz asociada debe reflejar esas tendencias o cambios de clase por lo que de forma general la matriz  $W$  no cumple la equidistancia entre categorías, es decir, no se verifica de manera general que  $w_{ij} = c |j - i| \quad c \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ .

### **Observación 5.2**

La desigualdad triangular no es por tanto una propiedad deseable en las matrices de distancias de medidas de dispersión ordinales. Es decir, no se cumple de manera general que  $w_{ij} \leq w_{iz} + w_{zj} \quad \forall i, j, z \in \{1, 2, \dots, k\}$  con  $i < z < j$ .

### Ejemplo 5.1:

Supongamos una escala de Likert con  $L = \{1, \dots, 7\}$  con las clases  $C^- = \{1, 2, 3\}$ ,  $C^N = \{4\}$  y  $C^+ = \{5, 6, 7\}$ . Supongamos además que la matriz de diferencias  $W$  está basada en la distancia entre los órdenes de las categorías pero penaliza además los saltos entre clases tomando el doble de la distancia en el caso de cambio de opinión y un ponderador de 1.5 en el caso de cambio con la clase neutra. Así se tiene que  $w_{17} = 2*(7-1) = 12$ ,  $w_{14} = 1.5*(4-1) = 4.5$  y  $w_{47} = 1.5*(7-4) = 4.5$ , y por tanto  $w_{17} > w_{14} + w_{47}$ .

## **5.3 Cálculo de la matriz de diferencias $W$**

En los casos sencillos en los que no existan clases en la escala ordinal ni aparezcan los problemas anteriormente planteados, la matriz de pesos puede venir definida como  $w_{ij} = |j - i|$  o funciones de la misma, tal y como se ha hecho en la mayoría de las medidas existentes hasta el momento.

En contextos más complejos, lo ideal sería que la matriz de diferencias  $W$  fuese definida por un experto. Existen diferentes técnicas que permiten construir matrices de discrepancia entre decisor y experto (para más detalles ver Saaty, 1988). Otros autores como García-Lapresta y Pérez-Román (2015) o García-Lapresta, del Pozo y Pérez-Román (2018) proponen un método de construcción de medidas de la matriz de diferencias agregando la información de diferentes expertos por una regla mayoritaria con un tratamiento de las etiquetas puramente ordinal.

Sin embargo, en esta memoria, se propone una situación intermedia en la que no sea necesaria la colaboración de un experto o el uso de métodos complejos para la construcción de la matriz de diferencias, pero en la que sí se tenga en cuenta la estructura de clases de la escala ordinal, en caso de haberla. Se introduce una definición de esta matriz  $W$  de manera semi-automática en función de un vector de parámetros  $\alpha$  que refleja precisamente los cambios de clase entre las etiquetas. A continuación se muestra esta

definición para el caso de escalas de Likert y posteriormente se generalizará a cualquier escala ordinal con clases.

### 5.3.1 Matriz de diferencias semi-automática en escalas de Likert

Dada una escala de Likert genérica, a la hora de definir la matriz de pesos  $W$ , puede considerarse lo siguiente: para categorías de la misma clase se toma el valor absoluto de la diferencia entre las mismas. Cuando se analice la discrepancia entre categorías de distinta clase, se tomarán dos parámetros  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  con  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  tales que si las categorías involucradas son contiguas (Negativa y Neutra o Positiva y Neutra) la distancia esté penalizada con el parámetro  $\alpha_1$  y si las categorías discrepan de Negativo a Positivo la penalización aplicada,  $\alpha_2$ , sea mayor.

#### **Definición 5.5 – Matriz de diferencias semi-automática para una escala de Likert genérica ( $W^\alpha$ )**

Sea una escala de Likert genérica con  $k$  categorías y sean  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  con  $\alpha_1 \leq \alpha_2$ . Se define la matriz de diferencias semi-automática  $W$  como:

$$W^\alpha(l_i, l_j) = \begin{cases} |j - i| & \text{si } \{i, j \in C^+\} \text{ ó } \{i, j \in C^N\} \text{ ó } \{i, j \in C^-\} \\ \alpha_1 |j - i| & \text{si } \{i \in C^N, j \notin C^N\} \text{ ó } \{i \notin C^N, j \in C^N\} \\ \alpha_2 |j - i| & \text{si } \{i \in C^+, j \in C^-\} \text{ ó } \{i \in C^-, j \in C^+\}. \end{cases}$$

#### Ejemplo 5.2:

En una escala tradicional de Likert de 5 categorías con  $\alpha_1 = 1.5$  y  $\alpha_2 = 2$  se tendría la siguiente matriz de diferencias:

$$W^{(1,1.5,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1.5 & 4 & 6 \\ 3 & 1.5 & 0 & 1.5 & 3 \\ 6 & 4 & 1.5 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

### Ejemplo 5.3:

Sean los siguientes vectores de frecuencias relativas, definidos en una escala de Likert tradicional:  $f_1 = (0.1, 0.5, 0.4, 0, 0)$  y  $f_2 = (0.5, 0.5, 0, 0, 0)$ .

Para ambos vectores la mediana única es la segunda categoría con la diferencia de que el 40% de la muestra que estaba en la categoría neutra en el primer vector se mueve a la clase  $C^-$  en el segundo.

Calculando la medida de dispersión con referencia la mediana única y matriz de diferencias el valor absoluto se obtiene la misma dispersión para ambos vectores  $\Phi_{||, Med_u}(f_1) = \Phi_{||, Med_u}(f_2) = 0.5$ .

Al calcular la medida de dispersión con referencia la mediana única y matriz de pesos  $W$  para  $s$  clases con vector  $\alpha = (1, 1.5, 2)$  se obtiene no obstante que el segundo vector tiene menos dispersión  $\Phi_{W^{\alpha Med_u}}(f_1) = 0.7 > 0.5 = \Phi_{W^{\alpha Med_u}}(f_2)$ , lo que era de esperar ya que toda la muestra está en la clase  $C^-$  y por tanto hay menos dispersión.

#### 5.3.2 Matriz de diferencias semi-automática en escalas ordinales con clases

En el caso que hubiera varias clases en la escala ordinal, la definición de la matriz de diferencias es algo más compleja. De hecho, una escala de Likert es una particularización del caso general con varias clases por lo que se formalizará a continuación la definición de la matriz  $W$  de forma semi-automática para  $s$  clases:

#### **Definición 5.6 – Matriz de diferencias semi-automática en escala ordinal con $s$ clases ( $W^{\alpha}$ )**

Sea  $X$  variable estadística ordinal con  $Ax = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  el conjunto de las  $k$  categorías ordenadas en las que toma valor y  $Lx = \{1, 2, \dots, k\}$  el conjunto de órdenes de las categorías. Supongamos que la escala tiene  $s$  clases con lo que el conjunto de órdenes  $Lx$  se puede particionar de la siguiente manera:  $Lx = \{\{1=r_1, \dots, r_2-1\}, \{r_2, \dots, r_3-1\}, \dots, \{r_s, \dots, k\}\}$ .



Se denota  $C_i$  = clase de la categoría  $i$  y  $C_j$  = clase de la categoría  $j$  y se define entonces la matriz  $W$  de dimensiones  $k \times k$  como:  $W^\alpha(I_i, I_j) = \alpha_{|C_j - C_i|} |j - i|$ , con  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{s-1}$ ,  $\alpha_r \in \mathbb{R} \forall r \in \{0, \dots, s-1\} \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ .

### Observación 5.3

Puede observarse de forma trivial que la matriz definida anteriormente es simétrica.

### Observación 5.4

Nótese que si  $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 1$  entonces la matriz de diferencias semi-automática con  $s$  clases verifica que  $w_{ij} = |j - i| \forall i, j \in \{1, \dots, k\}$ .

#### Ejemplo 5.4:

Las categorías en las que la agencia de rating Standard & Poor's califica las empresas a largo plazo son las siguientes:  $Ax = \{AAA, AA+, AA, AA-, A+, A, A-, BBB+, BBB, BBB-, BB+, BB, BB-, B+, B, B-, CCC+, CCC, CCC-, CC, C, D\}$ . Se tiene que  $Lx = \{1, 2, \dots, 22\}$ . De manera intuitiva un cambio de letra en la calificación es más grave que un cambio dentro de la misma letra. Por ejemplo, la distancia de la categoría 7 a la 8 es mayor que la distancia entre cualesquiera dos categorías dentro de las 7 primeras. Se tendría por tanto en este caso que existen  $s = 4$  clases y  $Lx$  quedaría particionado como  $Lx = \{\{1, 2, \dots, 7\}, \{8, 9, \dots, 16\}, \{17, 18, \dots, 21\}, \{22\}\}$ . Sea  $\alpha$  el vector  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  con  $\alpha_r \in \mathbb{R} \forall r \in \{0, 1, 2, 3\}$  y  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ , entonces la matriz de diferencias semi-automática con 4 clases  $(\Phi_W^\alpha)$  se formularía de la siguiente manera:

CLASE	ORDEN CATEGORÍA	ETIQUETAS	1							2							3							4	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	
			AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC+	CCC	CCC-	CC	C	D	
1	1	AAA	$\alpha_0 *  j-i $							$\alpha_1 *  j-i $							$\alpha_2 *  j-i $					$\alpha_3 *  j-i $			
	2	AA+																							
	3	AA																							
	4	AA-																							
	5	A+																							
	6	A																							
	7	A-																							
2	8	BBB+	$\alpha_1 *  j-i $							$\alpha_0 *  j-i $							$\alpha_1 *  j-i $					$\alpha_2 *  j-i $			
	9	BBB																							
	10	BBB-																							
	11	BB+																							
	12	BB																							
	13	BB-																							
	14	B+																							
3	15	B	$\alpha_2 *  j-i $							$\alpha_1 *  j-i $							$\alpha_0 *  j-i $					$\alpha_1 *  j-i $			
	16	B-																							
	17	CCC+																							
	18	CCC																							
	19	CCC-																							
	20	CC																							
	21	C																							
4	22	D	$\alpha_3 *  j-i $							$\alpha_2 *  j-i $							$\alpha_1 *  j-i $					$\alpha_0 *  j-i $			

Figura 5.1 –Estructura de  $W^\alpha$  para el ejemplo de Standard & Poor's

Por ejemplo, si se toma  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 = 2 \leq \alpha_2 = 3 \leq \alpha_3 = 4$  se tendría la siguiente matriz (nótese que se trata de una matriz simétrica en este caso):

CLASE	ORDEN CATEGORÍA	ETIQUETAS	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC+	CCC	CCC-	CC	C	D
1	1	AAA	0	1	2	3	4	5	6	14	16	18	20	22	24	26	28	30	48	51	54	57	60	84
	2	AA+	1	0	1	2	3	4	5	12	14	16	18	20	22	24	26	28	45	48	51	54	57	80
	3	AA	2	1	0	1	2	3	4	10	12	14	16	18	20	22	24	26	42	45	48	51	54	76
	4	AA-	3	2	1	0	1	2	3	8	10	12	14	16	18	20	22	24	39	42	45	48	51	72
	5	A+	4	3	2	1	0	1	2	6	8	10	12	14	16	18	20	22	36	39	42	45	48	68
	6	A	5	4	3	2	1	0	1	4	6	8	10	12	14	16	18	20	33	36	39	42	45	64
	7	A-	6	5	4	3	2	1	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	30	33	36	39	42	60
2	8	BBB+	14	12	10	8	6	4	2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	18	20	22	24	26	42
	9	BBB	16	14	12	10	8	6	4	1	0	1	2	3	4	5	6	7	16	18	20	22	24	39
	10	BBB-	18	16	14	12	10	8	6	2	1	0	1	2	3	4	5	6	14	16	18	20	22	36
	11	BB+	20	18	16	14	12	10	8	3	2	1	0	1	2	3	4	5	12	14	16	18	20	33
	12	BB	22	20	18	16	14	12	10	4	3	2	1	0	1	2	3	4	10	12	14	16	18	30
	13	BB-	24	22	20	18	16	14	12	5	4	3	2	1	0	1	2	3	8	10	12	14	16	27
	14	B+	26	24	22	20	18	16	14	6	5	4	3	2	1	0	1	2	6	8	10	12	14	24
3	15	B	28	26	24	22	20	18	16	7	6	5	4	3	2	1	0	1	4	6	8	10	12	21
	16	B-	30	28	26	24	22	20	18	8	7	6	5	4	3	2	1	0	2	4	6	8	10	18
	17	CCC+	48	45	42	39	36	33	30	18	16	14	12	10	8	6	4	2	0	1	2	3	4	10
	18	CCC	51	48	45	42	39	36	33	20	18	16	14	12	10	8	6	4	1	0	1	2	3	8
	19	CCC-	54	51	48	45	42	39	36	22	20	18	16	14	12	10	8	6	2	1	0	1	2	6
	20	CC	57	54	51	48	45	42	39	24	22	20	18	16	14	12	10	8	3	2	1	0	1	4
	21	C	60	57	54	51	48	45	42	26	24	22	20	18	16	14	12	10	4	3	2	1	0	2
4	22	D	84	80	76	72	68	64	60	42	39	36	33	30	27	24	21	18	10	8	6	4	2	0

Figura 5.2 –  $W^\alpha$  con  $\alpha = (1,2,3,4)$  para el ejemplo de Standard & Poor's

## Observación 5.5

La matriz dada en la Definición 5.5 es una particularización de la dada en la Definición 5.6 para el caso en el que la escala ordinal tenga una estructura concreta de Likert.

## Observación 5.6

Nótese que las medidas de dispersión que utilizan la matriz de diferencias semi-automática asociada a un conjunto de categorías con  $s$  clases con  $\alpha_r > 1$  para algún  $r$  (y por la Definición 5.6 para todo  $\forall j \in \{0, \dots, s-1\}$  con  $j > r$ ) no

cumplen las propiedades de mitosis, invarianza frente a traslaciones ni la de invarianza frente a distribuciones complementarias (ver 3.5, 3.7 y 3.9). Esto tiene sentido dado que se quiere penalizar de forma no lineal estas tendencias o cambios de clases (ver detalles en la próxima sección 5.4).

### **Observación 5.7**

La interpretación de la dispersión en el caso de utilizar matrices semi-automáticas asociadas a escalas con  $s$  clases varía dado que la discrepancia ya no se corresponde exactamente con la unidad de la escala. Para una correcta comprensión el valor de dispersión obtenido hay que tomar como referencia las penalizaciones dadas en la matriz de diferencias.

## ***5.4 Propiedades de la función de dispersión para una escala ordinal con $s$ clases y matriz de diferencias semi-automática $W^\alpha$***

A continuación analizaremos si las medidas propuestas  $\Phi_W$  (sin referencia o con referencia la mediana única) con la matriz de diferencias semi-automática presentada en la sección anterior ( $W^\alpha$ ) verifican las propiedades de las funciones de dispersión presentadas en el capítulo 3. Para este análisis, hemos agrupado las propiedades en proposiciones en función de si se verifican o no, detallando algunos casos particulares en otras proposiciones, observaciones y corolarios. Las propiedades más complejas se presentan aisladamente en proposiciones específicas. La Tabla 5.1 muestra un resumen de los análisis que hemos llevado a cabo en esta sección:

Propiedades capítulo 3	Proposición
3.1 Tipo de output 3.2 No negatividad 3.3 Invarianza Escala/ $N$	Proposición 5.1
3.4 Valores frontera	Proposición 5.2
3.5 Mitosis 3.6 $D \in [0,1]$ 3.7 Invarianza Traslaciones 3.8 Invarianza Permutaciones 3.9 Invarianza Distribuciones complementarias	Proposición 5.3 <i>(Proposición 5.4 caso particular para 3.9)</i>
3.10 Monotonía en $k = 2$ . Linealidad, concavidad y convexidad	Proposición 5.5
3.11 Independencia a valores extremos en situaciones simétricas ( <i>Med_u central, k impar</i> )	Proposición 5.6

Tabla 5.1 - Proposiciones para el análisis de las propiedades de  $\Phi_{W\alpha}$  y  $\Phi_{W\alpha Med\_u}$

### Proposición 5.1

Sea  $X$  variable estadística ordinal que toma valores en una escala de  $k$  categorías con  $s$  clases y sea  $\alpha \in \mathbb{R}^s$  con  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{s-1}$ , entonces se satisface que:

- Propiedad 3.1 - Tipo de output: el output de  $\Phi_{W\alpha}$  y de  $\Phi_{W\alpha Med\_u}$  es cuantitativo.
- Propiedad 3.2 - No negatividad:  $\Phi_{W\alpha}(f) \geq 0$  y  $\Phi_{W\alpha Med\_u}(f) \geq 0 \forall f \in [0,1]^{k*}$ .
- Propiedad 3.3 - Invarianza de la escala (Independencia de  $N$ ):  $\Phi_{W\alpha}$  y  $\Phi_{W\alpha Med\_u}$  son invariantes en la escala y por tanto, independientes del tamaño muestral.

*Demostración:*

- Trivial por la Definición 4.1 y la Definición 4.2.
- Trivial ya que por definición  $w_{ij}^{\alpha} \geq 0 \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  y  $f_i \geq 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

3. Trivial ya que ambas medidas se definen para el vector de frecuencias relativas  $f$  que es invariante en la escala e independiente del tamaño muestral.  $\square$

A continuación analizaremos la propiedad de las condiciones de frontera y demostraremos que  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  satisfacen las condiciones de frontera polarizadas. Para ello previamente se demostrará el siguiente lema:

### **Lema 5.1**

Sea  $X$  variable estadística ordinal que toma valores en una escala de  $k$  categorías con  $s$  clases y sea  $\alpha \in \mathbb{R}^s$  con  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{s-1}$ . Las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  están acotadas por el valor  $\alpha_{s-1}(k-1)/2$ .

*Demostración:* Sea el vector polar  $f_{polar} = (1/2, 0, \dots, 0, 1/2)$ .

En el caso de medida de dispersión sin referencia, teniendo en cuenta la definición de la matriz de diferencias semi-automática (Definición 5.6) y la Observación 5.1 sobre la formulación de la medida de dispersión con matrices simétricas, se tiene que la dispersión del vector polar se alcanza en:

$$\Phi_{W^\alpha}(f_{polar}) = 2(1/2)(1/2)\alpha_{s-1}(k-1) = \alpha_{s-1}(k-1)/2.$$

En el caso que se tome como referencia la mediana única, para el vector polar se cumple que  $Med_u = k$  (ver Definición 3.5) y por tanto:

$$\Phi_{W^\alpha Med_u}(f_{polar}) = (1/2) \alpha_{s-1} |1 - k| = \alpha_{s-1}(k-1)/2. \quad \square$$

### **Proposición 5.2 –Valores de frontera (Propiedad 3.4)**

Sea  $X$  variable estadística ordinal que toma valores en una escala de  $k$  categorías con  $s$  clases y sea  $\alpha \in \mathbb{R}^s$  con  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{s-1}$ , entonces, las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  satisfacen las condiciones de frontera polarizadas.

*Demostración:*

Dispersión mínima: Se cumple que  $w_{ij} > 0$  y que  $\forall f \in [0,1]^{k*} f_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, k\}$  y  $\sum f_i = 1$ , entonces  $\Phi_{W^\alpha}$  satisface la condición de dispersión mínima ya que:

$$\Phi_{W^\alpha}(f) = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^k f_i f_j w_{ij} = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } f_i = 1 \text{ y } f_j = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \ j \neq i.$$

Y  $\Phi_{W^\alpha_{Med\_u}}$  satisface la condición de dispersión mínima ya que:

$$\Phi_{W^\alpha_{Med\_u}}(f) = \sum_{j=1}^k f_j w_{Med\_u, j} = 0 \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\} \text{ tal que } f_i = 1 \text{ y } f_j = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \ j \neq i.$$

Dispersión máxima: Sea el vector polar  $f_{polar} = (1/2, 0, \dots, 0, 1/2)$  y sea  $g \in [0, 1]^{k*}$  vector de frecuencias relativas, entonces:

$$\Phi_{W^\alpha}(g) = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^k g_i g_j w_{ij} \leq 2 \alpha_{s-1} \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^k g_i g_j |j - i| \stackrel{(1)}{\leq} 2 \alpha_{s-1} \frac{k-1}{4} \stackrel{(2)}{=} \Phi_{W^\alpha}(f_{polar}).$$

$$\begin{aligned} \Phi_{W^\alpha_{Med\_u}}(g) &= \sum_{j=1}^k g_j w_{Med\_u, j} = \sum_{j=1}^k g_j \alpha_{|c_j - c_{Med\_u}|} |j - Med\_u| \leq \alpha_{s-1} \sum_{j=1}^k g_j |j - Med\_u| \stackrel{(1)}{\leq} \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha_{s-1} \frac{k-1}{2} \stackrel{(2)}{=} \Phi_{W^\alpha_{Med\_u}}(f_{polar}). \end{aligned}$$

- (1) Esta desigualdad se cumple por la cota del IOV (ver sección 2.3).
- (2) La última igualdad se verifica por el Lema 5.1. □

### Proposición 5.3

Sea  $X$  variable estadística ordinal que toma valores en una escala de  $k$  categorías con  $s$  clases y sea  $\alpha \in \mathbb{R}^s$  con  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{s-1}$ . Entonces de forma general se tiene que:

- a) Propiedad 3.5: Las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha_{Med\_u}}$  no satisfacen la propiedad de mitosis.
- b) Propiedad 3.6: Las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha_{Med\_u}}$  no están necesariamente acotadas en  $[0, 1]$ .
- c) Propiedad 3.7: Las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha_{Med\_u}}$  no son invariantes frente a traslaciones.

- d) Propiedad 3.8: Las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  no son invariantes frente a permutaciones.
- e) Propiedad 3.9: Las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  no son invariantes frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:*

- a) Se mostrará un contraejemplo: sea una variable estadística definida en una escala de Likert tradicional de 5 categorías (ver Definición 5.3). Sea la matriz de pesos definida de forma semi-automática con  $\alpha = (1, 1.5, 2)$ :

$$W^{(1,1.5,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1.5 & 4 & 6 \\ 3 & 1.5 & 0 & 1.5 & 3 \\ 6 & 4 & 1.5 & 0 & 1 \\ 8 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se define  $f_1 = (0.9, 0, 0, 0.1, 0)$  y  $f_2 = (0.9, 0, 0.05, 0, 0.05)$  ( $f_2$  vector resultante de una mitosis en  $r = 4$  con  $\alpha = 0.1$ ). Entonces se tiene que:

$\Phi_{W^\alpha}(f_1) = 1.08 > 1.01 = \Phi_{W^\alpha}(f_2)$  y que  $\Phi_{W^\alpha Med_u}(f_1) = 0.6 > 0.55 = \Phi_{W^\alpha Med_u}(f_2)$ . Por tanto  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  no satisfacen de forma general la propiedad de mitosis.

- b) Trivial, por el Lema 5.1 ya que  $k \geq 2$  y  $\alpha_{s-1} \in \mathbb{R}^s$  con  $1 \leq \alpha_{s-1}$ .
- c) Se mostrará un contraejemplo: sea una variable estadística definida en una escala tradicional de Likert de 5 categorías (ver Definición 5.3) con  $\alpha = (1, 1.5, 2)$  y  $W^\alpha$  definida por tanto como en el apartado anterior.

Dado el vector  $f = (0.2, 0.5, 0.3, 0, 0)$  y el parámetro  $a = 2$  se tiene que el vector trasladado 2 posiciones sería  $f^{(2)} = (0, 0, 0.2, 0.5, 0.3)$ .

Entonces se cumple que:  $\Phi_{W^\alpha}(f) = 0.2 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.3 \cdot 3 + 0.5 \cdot 0.3 \cdot 1.5 = 0.51$  y que  $\Phi_{W^\alpha}(f^{(2)}) = 0.2 \cdot 0.5 \cdot 1.5 + 0.2 \cdot 0.3 \cdot 3 + 0.5 \cdot 0.3 = 0.48$ .

Como  $Med_u(f) = 2$  y  $Med_u(f^{(2)}) = 4$ , se tiene que:  $\Phi_{W^\alpha Med_u}(f) = 0.2 + 0.3 \cdot 1.5 = 0.65$  y que  $\Phi_{W^\alpha Med_u}(f^{(2)}) = 0.2 \cdot 1.5 + 0.3 = 0.6$ .

Por tanto  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  no son invariantes frente a traslaciones.

- d) Esta propiedad no se cumple para el vector unitario  $\alpha_i = 1 \forall i \in \{0, \dots, s-1\}$  (Propiedad 3.8), entonces no se cumple de manera general para cualquier vector  $\alpha \in \mathbb{R}^s$ .
- e) Se mostrará un contraejemplo: sea una escala ordinal con  $Lx = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  en la que las clases son  $Lx = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ . Se toma el vector de pesos  $\alpha = (1, 1.5, 2)$  con lo que se tiene la siguiente matriz de pesos:

$$W^{(1, 1.5, 2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1.5 & 3 & 6 & 8 \\ 1.5 & 0 & 1 & 3 & 4.5 \\ 3 & 1 & 0 & 1.5 & 3 \\ 6 & 3 & 1.5 & 0 & 1 \\ 8 & 4.5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado un vector  $f = (0, 0.5, 0, 0, 0.5)$  y su vector complementario  $f' = (0.5, 0, 0, 0.5, 0)$ , se cumple que  $\Phi_{W^\alpha}(f) = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot w_{2,5} = 0.5 \cdot 4.5 = 2.25$  y que  $\Phi_{W^\alpha}(f') = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot w_{1,4} = 0.5 \cdot 6 = 3$ .

Como  $Med_u(f) = 5$  y  $Med_u(f') = 4$ , se tiene que  $\Phi_{W^{\alpha_5}}(f) = 0.5 \cdot w_{2,5} = 0.5 \cdot 4.5 = 2.25$  y que  $\Phi_{W^{\alpha_4}}(f') = 0.5 \cdot w_{1,4} = 0.5 \cdot 6 = 3$ .

Por tanto  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  no son invariantes frente a distribuciones complementarias.  $\square$

### Corolario 5.1

Las medidas de dispersión  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  pueden transformarse en un índice dividiendo entre el la cota  $\alpha_{s-1}(k-1)/2$ .

*Demostración:* Trivial por el Lema 5.1.  $\square$



### Observación 5.8

En esta memoria no se han acotado las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  en el intervalo  $[0,1]$  para mantener su valor como la discrepancia media al tomar dos individuos de la muestra al azar (en el caso de dispersión sin referencia) o la discrepancia media entre la referencia y un individuo al azar (dispersión con referencia). Para la correcta interpretación de la dispersión hay que tener en cuenta las penalizaciones definidas en la matriz de diferencias (ver Observación 5.7).

### Observación 5.9

Salvo la entropía, ninguna de las medidas de dispersión ordinal presentadas en el estado del arte del capítulo 2 (LOV de Leik, 1966; IOV de Berry y Mielke, 1992; COV de Kvalseth, 1995;  $1-I^2$  de Blair y Lacy, 2000; o Dsn de Tastle y Wierman, 2007) verifican la invarianza frente a permutaciones. Esta no invarianza frente a permutaciones es precisamente una característica necesaria en medidas de dispersión de variables cualitativas ordinales (ver Observación 3.4).

### Observación 5.10

Conviene notar que dado que el objetivo de una matriz de diferencias semi-automática definida en escalas con  $s$  clases es precisamente penalizar los saltos entre esas clases de manera no lineal, era de esperar que las propiedades a), c) y e) de la proposición anterior no se cumplan de forma general. Se trata de propiedades no deseables en una matriz de diferencias definida para una escala con  $s$  clases.

### Observación 5.11

La propiedad de invarianza frente a traslaciones (c) se cumplirá para una matriz que defina las distancias de manera lineal. Éste es el caso de  $w_{ij} = |j - i|$  o en general de cualquier vector  $\alpha$  de pesos con  $\alpha_i = c$ ,  $c \in \mathbb{R}^+ \forall i \in \{0, \dots, s-1\}$ . En este caso concreto, la medida de dispersión sin referencia  $\Phi_{W^\alpha}$  satisface la invarianza frente a traslaciones al ser equivalente a IOV y COV. Por otro lado, la medida de dispersión con referencia  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  es equivalente a LOV con lo

que también satisface la invarianza frente a traslaciones (ver Proposición 3.18, Proposición 3.19 y Proposición 3.20).

#### Proposición 5.4

Sea  $W$  matriz de diferencias verificando que  $w_{ij} = w_{k-i+1, k-j+1}$ , entonces  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha \text{Med}_u}$  cumplen la propiedad de invarianza frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:*

Sean  $f$  y  $f'$  vectores complementarios, se tiene entonces que:

$$\Phi_{W^\alpha}(f') = \sum_{i < j} f'_i f'_j w_{ij} = \sum_{i < j} f_{k-i+1} f_{k-j+1} w_{ij} \stackrel{(1)}{=} \sum_{n < m} f_m f_n w_{mn} = \Phi_{W^\alpha}(f).$$

(1) La igualdad anterior se cumple tomando  $m = k-i+1$  y  $n = k-j+1$  y teniendo en cuenta que  $w_{ij} = w_{k-i+1, k-j+1} = w_{mn}$ .

$$\Phi_{W^\alpha \text{Med}_u}(f') = \sum_{i=1}^k f'_i W(l_i, l_{\text{Med}_u(f')}) = \sum_{i=1}^k f_{k-i+1} W(l_{k-i+1}, l_{k-\text{Med}_u(f')+1}) \stackrel{(2)}{=}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=1}^k f_{k-i+1} W(l_{k-i+1}, l_{\text{Med}_u(f)}) = \sum_{t=1}^k f_t W(l_t, l_{\text{Med}_u(f)}) = \Phi_{W^\alpha \text{Med}_u}(f).$$

(2) Esta igualdad se cumple porque  $\text{Med}_u(f) = k - \text{Med}_u(f') + 1$ , con  $f$  y  $f'$  vectores complementarios, tal y como se demuestra a continuación:

Sea  $r = \text{Med}_u(f') \Rightarrow F'_r > 1/2$  y  $F'_i \leq 1/2 \forall i < r$ . Entonces se cumple que:

$$F'_r = \sum_{i=1}^r f'_i = \sum_{i=1}^r f_{k-i+1} > 1/2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k-r} f_i \leq 1/2.$$

$$\text{Y que } F'_{r-1} = \sum_{i=1}^{r-1} f'_i = \sum_{i=1}^{r-1} f_{k-i+1} \leq 1/2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k-r+1} f_i > 1/2.$$

Y por tanto  $k-r+1$  es la mediana única de  $f$ . □

## Corolario 5.2

Sea  $X$  una variable estadística ordinal con una escala de Likert tradicional (ver Definición 5.3), entonces las medidas de dispersión ordinal  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^\alpha \text{Med}_u}$  son invariantes frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:* La escala de Likert tradicional es simétrica por lo que la matriz de pesos  $W$  en escalas ordinales con esta estructura verifica la condición de la Proposición 5.4 para cualquier vector de pesos  $\alpha$ .  $\square$

## Corolario 5.3

Las medidas de dispersión  $\Phi_{||}$  y  $\Phi_{||, \text{Med}_u}$  ( $w_{ij} = |j - i|$ ) son invariantes frente a distribuciones complementarias.

*Demostración:* Como  $w_{k-i+1, k-j+1} = |(k-j+1) - (k-i+1)| = |j - i| = w_{ij}$ , se tiene por la Proposición 5.4 que  $\Phi_{||}$  y  $\Phi_{||, \text{Med}_u}$  son invariantes frente a distribuciones complementarias.  $\square$

## Proposición 5.5 –Monotonía en $k = 2$ (Propiedad 3.10)

Sea  $X$  variable estadística ordinal que toma valores en una escala de  $k = 2$  categorías. Entonces se cumple que:

- a)  $\Phi_{W^\alpha}$  es una función no lineal, creciente en  $\beta \in [0, 1/2]$  y cóncava.
- b)  $\Phi_{W^\alpha \text{Med}_u}$  es una función lineal en  $\beta \in [0, 1/2]$ .

*Demostración:*

- a) Como ya se vio anteriormente (ver 3.10) para toda variable estadística  $X$  con  $k = 2$  categorías se tiene que su vector de frecuencias relativas puede expresarse en función de un único parámetro  $\beta$ ,  $\beta \in [0, 1/2]$  siendo  $f = (\beta, 1-\beta)$  y  $F = (\beta, 1)$ .

Además, en este caso, la matriz  $W^\alpha$  puede formularse mediante un único parámetro  $\alpha$  con  $\alpha \geq 1$  como:

$$W^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces que la medida de dispersión sin referencia puede expresarse como  $\Phi_{W^\alpha}(\beta) = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^2 f_i f_j w_{ij} = 2\alpha\beta(1-\beta)$ , función no lineal en  $\beta \in [0, 1/2]$ .

Derivando respecto a  $\beta$  se tiene que:  $\Phi'_{W^\alpha}(\beta) = \alpha(1-2\beta) \geq 0$  en  $\beta \in [0, 1/2]$ , por lo que es una función creciente.

Finalmente, como  $\Phi''_{W^\alpha}(\beta) = -2\alpha$  con  $\alpha \geq 1$  se tiene que es una función cóncava.

b) Sea  $r$  la referencia, se tiene entonces que:

$$\text{Si } r = 1: \Phi_{W^{\alpha,1}}(\beta) = \sum_{i=1}^2 f_i w_{i1} = \beta \cdot 0 + (1-\beta) \alpha = (1-\beta) \alpha.$$

$$\text{Si } r = 2: \Phi_{W^{\alpha,2}}(\beta) = \sum_{i=1}^2 f_i w_{i2} = \beta \alpha + (1-\beta) \cdot 0 = \alpha \beta.$$

En ambos casos se trata de una función lineal en  $\beta \in [0, 1/2]$ . □

**Proposición 5.6: Independencia a valores extremos en situaciones simétricas (Propiedad 3.11)**

Sea  $X$  variable estadística ordinal que toma valores en una escala de  $k$  categorías ( $k$  impar) con  $s$  clases y sea  $\alpha \in \mathbb{R}^s$  con  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{s-1}$  que representa los cambios de clase en las etiquetas. Entonces de forma general se tiene que las medidas  $\Phi_{W^\alpha}$  y  $\Phi_{W^{\alpha_{Med_u}}}$  no cumplen la propiedad 3.11 de independencia a valores extremos en situaciones simétricas.

*Demostración:* se muestran contraejemplos con los vectores del Ejemplo 3.4.

Para  $\Phi_{W^\alpha}$  se toma la matriz de pesos  $W^\alpha$  con  $\alpha = (1, 1.5, 2)$ :

Ejemplo	1	2	3	4	5	$\Phi_{W^\alpha}$
$f$	50%	0%	50%	0%	0%	1.50
$f^{0.4}$	10%	0%	50%	0%	40%	2.14
$f^{0.25}$	25%	0%	50%	0%	25%	2.50

Tabla 5.2 - Dispersión de vectores con mediana única central con  $\Phi_{W^\alpha}$

Para  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$  supongamos que  $X$  toma valores en una escala ordenada de 5 categorías y sea  $Lx = \{1, 2, \dots, 5\}$  el conjunto de órdenes de estas categorías. Supongamos que la escala tiene 4 clases con lo que el conjunto de órdenes  $Lx$  se puede particionar de la siguiente manera:  $Lx = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ . Sea el vector  $\alpha = (1, 1.5, 2, 2.5)$ . Se tiene por tanto la siguiente matriz  $W^\alpha$ :

$$W^{(1, 1.5, 2, 2.5)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 0 & 1.5 & 4 & 7.5 \\ 3 & 1.5 & 0 & 1.5 & 4 \\ 6 & 4 & 1.5 & 0 & 1.5 \\ 10 & 7.5 & 4 & 1.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces se tiene que:

Ejemplo	1	2	3	4	5	$\Phi_{W^\alpha Med_u}$
$f$	50%	0%	50%	0%	0%	1.50
$f^{0.4}$	10%	0%	50%	0%	40%	1.9
$f^{0.25}$	25%	0%	50%	0%	25%	1.75

Tabla 5.3 - Dispersión de vectores con mediana única central con  $\Phi_{W^\alpha Med_u}$

□

Obsérvese que en el contraejemplo mostrado, la clase de la categoría central es la segunda y existe una asimetría en la distancia de las clases de la primera categoría a la categoría central (clases 1 a 2) y la distancia de la clase de la última categoría a la categoría central (clases 4 a 2). Si la escala muestra una simetría entre las clases de las categorías extremas y la clase de la categoría

central, entonces sí que existe independencia a valores extremos en caso de simetría central:

**Proposición 5.7**

Sea  $X$  variable estadística ordinal que toma valores en una escala de  $k$  categorías,  $k$  impar, con  $s$  clases tales que se cumple:

$$\left| c_1 - c_{\frac{k+1}{2}} \right| = \left| c_k - c_{\frac{k+1}{2}} \right| \quad (a)$$

Sea además  $\alpha \in \mathbb{R}^s$  con  $\alpha_0 = 1 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{s-1}$ .

Entonces se cumple que  $\Phi_{W^\alpha \text{Med}_u}$  es independiente frente a valores extremos en situaciones simétricas.

*Demostración:* Sean  $f$  y  $f^\beta$  como en la Definición 3.15.

Por definición se tiene que  $\text{Med}_u(f) = \text{Med}_u(f^\beta) = (k+1)/2$ , que notaremos  $\text{Med}_u$ . Entonces se cumple que:

$$\Phi_{W^\alpha \text{Med}_u}(f^\beta) = \sum_{i=1}^k f_i^\beta w_{i, \text{Med}_u} = (f_1 - \beta) w_{1, \text{Med}_u} + \sum_{i=2}^{k-1} f_i w_{i, \text{Med}_u} + (f_k + \beta) w_{k, \text{Med}_u} = \quad (1)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \Phi_{W^\alpha \text{Med}_u}(f).$$

(1) La última igualdad se verifica por (a) y porque como la matriz  $W^\alpha$  se define de forma semi-automática para el vector  $\alpha$ , se tiene que:

$$w_{1, \text{Med}_u} = \alpha_{|c_1 - c_{\text{Med}_u}|} \left| 1 - \frac{k+1}{2} \right| = \alpha_{|c_k - c_{\text{Med}_u}|} \left| k - \frac{k+1}{2} \right| = w_{k, \text{Med}_u}.$$

□

**Observación 5.12**

Una escala genérica de Likert verifica (a) de la proposición anterior ya que la primera categoría siempre estará en la clase 1 y la última en la clase 3 y por tanto la distancia entre las clases de estas categorías extremas será siempre 2, es decir el salto estará ponderado por  $\alpha_2$ .

Esto quiere decir que  $\Phi_{W^{\alpha}Med_u}$  con una escala de Likert genérica es independiente frente a valores extremos en situaciones simétricas.

#### 5.4.1 Resumen de propiedades de las medidas propuestas

A continuación se muestra un cuadro resumen del análisis realizado a lo largo de esta sección:

Propiedades capítulo 3	$\Phi_W^{\alpha}$ (sin referencia o con referencia Med <sub>u</sub> )	Condiciones bajo las que se verifica cada propiedad para $\Phi_W^{\alpha}$ (sin referencia o con referencia Med <sub>u</sub> )
3.1 Tipo de output	Cuanti.	
3.2 No negatividad	Sí	
3.3 Invarianza Escala/N	Sí	
3.4 Valores frontera	Polarizada	
3.5 Mitosis	No	
3.6 $D \in [0,1]$	No	Cota: $\alpha_{s-1}(k-1)/2$
3.7 Invarianza Traslaciones	No	$\alpha_i = c, c \in \mathbb{R}^+ \forall i \in \{0, \dots, s-1\}$ .
3.8 Invarianza Permutaciones	No	
3.9 Invarianza Distribuciones complementarias	No	$w_{ij} = w_{k-i+1, k-j+1}$
3.10 Monotonía en $k=2$ . Linealidad, concavidad y convexidad	$\Phi_W^{\alpha}$ : no lineal, creciente en $\beta \in [0, 1/2]$ y cóncava $\Phi_{W^{\alpha}, Med_u}$ : lineal en $\beta \in [0, 1/2]$	
3.11 Independencia a valores extremos en situaciones simétricas (Med <sub>u</sub> central, $k$ impar)	No	Para $\Phi_{W^{\alpha}, Med_u}$ : $\left  c_1 - c_{\frac{k+1}{2}} \right  = \left  c_k - c_{\frac{k+1}{2}} \right $

Tabla 5.4 - Resumen del análisis de las propiedades de  $\Phi_W^{\alpha}$  y  $\Phi_{W^{\alpha}Med_u}$

Las medidas propuestas satisfacen las propiedades deseables de cualquier medida de dispersión de variables cualitativas o categóricas: son cuantitativas, no negativas, invariantes de la escala y se indexan fácilmente dividiendo por su cota. Además, son medidas propias de variables cualitativas ordinales ya que alcanzan su valor máximo en el vector polar y no son invariantes frente a permutaciones.

Sin embargo, no satisfacen de manera general la propiedad de "mitosis", la propiedad de la "invarianza frente a traslaciones" y la de "invarianza frente a distribuciones complementarias" (ver 3.5, 3.7, 3.9 respectivamente). Esto no es de sorprender, dado que el objetivo de una matriz de diferencias con  $s$  clases es precisamente recoger la potencial no equidistancia o no simetría penalizando los saltos entre las clases de clases de manera no lineal.

Finalmente, de manera general no son independientes a valores extremos en situaciones de simetría (ver 3.11), algo que es deseable en medidas de dispersión ordinal. Existe no obstante un tipo de escalas bastante frecuentes (escalas tradicionales de Likert o en general, escalas con clases impares con la misma distancia de la clase de la categoría central a las clases de la primera y la última categoría (ver Proposición 5.7), para las que la medida propuesta con referencia la mediana única sí es independiente a valores extremos en situaciones de simetría, lo que puede hacer cuestionarse la idoneidad de esta medida.





## **6 Medición del impacto de la naturaleza de las etiquetas en el diseño de un cuestionario**

En este capítulo se presenta un experimento que evalúa el impacto de la naturaleza de las etiquetas de una escala ordinal para poner de manifiesto la dificultad subyacente en la percepción de las mismas. Además, para recoger adecuadamente el impacto de la naturaleza de las etiquetas aplicaremos las nuevas medidas de dispersión ordinal definidas en el capítulo 4.

Concretamente y a modo de breve introducción, el estudio plantea si las respuestas y conclusiones finales de un estudio varían y de qué manera dependiendo de la formulación de las preguntas y las correspondientes etiquetas de respuesta. La investigación propone preguntas susceptibles de ser formuladas tanto en grado de acuerdo (con etiquetas lingüísticas habituales en una escala Likert), como en frecuencia de realización de la acción (con las etiquetas numéricas correspondientes).

### **6.1 *Objetivos del estudio***

A continuación se detallan los objetivos del experimento llevado a cabo.

#### **6.1.1 Objetivo Principal**

El objetivo principal es cuantificar el impacto del uso de etiquetas lingüísticas o frecuentistas para demostrar la necesidad de modelar la no equidistancia entre las categorías de una escala ordinal.

#### **6.1.2 Objetivos Específicos**

En concreto se plantearán los siguientes puntos:

O1. ¿Influyen las preguntas en el impacto de las etiquetas?

O2. ¿Cómo influye el consenso/dispersión previo en el impacto de las etiquetas?

O3. ¿Existe algún tipo de tendencia / asimetría en la traslación de las respuestas dadas con etiquetas lingüísticas a las respuestas dadas con etiquetas frecuentistas?

## **6.2 Marco teórico**

### **6.2.1 Escalas ordinales**

La medición de actitudes, opiniones o intensidades de un concepto es muy frecuente en la investigación social. En 1946, Stevens exponía en su artículo que el mundo académico se planteaba desde hacía algunos años si era posible medir sensaciones humanas y en caso afirmativo, cómo hacerlo. En su trabajo, Stevens (1946) clasifica las escalas en nominales, ordinales, de intervalo y de proporción y establece las operaciones y estadísticos permitidos con cada una de ellas (ver Figura 1.1).

Hoy en día son muchas las disciplinas que basan sus conclusiones en investigaciones realizadas mediante cuestionarios con un número limitado de respuestas. Cuando las opciones de respuesta son un conjunto cerrado y ordenado se dice que es una escala ordinal (ver Definición 2.3).

#### **Observación 6.1**

Conviene notar que en la literatura se han encontrado dos conceptos diferentes de “escala” en un contexto muy relacionado:

1. Escala (ordinal) como conjunto cerrado ordenado de opciones ordenadas de respuesta a una pregunta.
2. Escala como instrumento para recoger información sobre las actitudes (habitualmente llamada escala ordinal sumada).

Tal y como señala Casper (2013) existe mucha bibliografía en el campo de las ciencias sociales sobre el segundo concepto de escala, sus posibles construcciones y la evolución de la misma en la historia.

En esta experimento se trabajará sobre el primer concepto de escala, concretamente con una escala ordinal de Likert de 5 puntos para expresar el grado de acuerdo (se detallará en 6.3.Experimento: diseño y materiales). No obstante, se introduce muy brevemente el segundo concepto por su relevancia en la bibliografía y su relación con el primer punto.

La escala sumada es un instrumento para recoger información sobre las actitudes que consiste en diferentes metodologías para asignar a cada encuestado puntuaciones sobre la actitud medida en función de las respuestas dadas a diferentes ítems o preguntas (Bozal, 2005). Algunas de las escalas sumadas más relevantes son: Thurstone (1927), Likert (1932), Guttman (1974) y Osgood (Osgood, Suci y Tannenbaum, 1957).

#### 6.2.2 Limitaciones y factores a tener en cuenta en las escalas ordinales

La escala de Likert es muy utilizada por su rápida construcción, aplicación e interpretación (Duncan y Stenbeck, 1987), no obstante presenta algunas limitaciones que han de ser tenidas en cuenta.

Existen numerosos estudios sobre el impacto que pueden tener en las respuestas y conclusiones los diferentes problemas que las escalas ordinales en general pueden presentar. Éstos van desde el diseño del cuestionario (número de opciones de respuesta, formulación de las etiquetas utilizadas, etc.) hasta el análisis estadístico de los datos recogidos (tipo de estadísticos utilizados, análisis de factores en las respuestas, etc.).

Algunos autores exponen que el hecho de tener un número de respuestas cerrado obliga al entrevistado a contestar una de ellas que quizás no se corresponde con su respuesta real (Cohen *et al.*, 2002; Lalla *et al.*, 2005). El número de respuestas que se ofrecen y la posición de los ítems en el cuestionario, pueden también influir sobre los resultados (Cox, 1980; Watkins, 1992; Lalla *et al.*, 2005; González-Betanzos, Leenen, Lira-Mandujano y Vera-Valero, 2013). También genera debate y es objeto de estudio la paridad del número de escalas ya que si es impar se detecta una tendencia a responder la escala intermedia lo que sugiere utilizar un número par de respuestas, si

bien algunos autores defienden que si el entrevistado quiere responder con un valor intermedio debería tener la opción (Cohen *et al.*, 2002). Varios autores analizan el impacto de algunos de los factores anteriores sobre las respuestas dadas en los valores extremos (Albaum y Murphy, 1988; Watkins, 1992; Clarke, 2000). También se estudian con frecuencia otras características como las diferencias culturales, la raza, el género, la edad o la personalidad del encuestado que pueden producir divergencia en los patrones de respuesta (Watkins, 1992; Cohen *et al.*, 2002; Martínez García y Martínez Caro, 2010).

La escala de Likert presenta además otros dos problemas importantes, ya mencionados en el capítulo 5: supone unidimensionalidad en las actitudes y supone equidistancia entre las alternativas expuestas localizadas en un espacio continuo (Duncan y Stenbeck, 1987; Brody y Dietz, 1997; Cohen *et al.*, 2002; Oppenheim, 2000; Lalla *et al.*, 2005). La equidistancia y en general la suposición de una distancia subyacente y por tanto la posibilidad de utilizar estadísticos propios de escalas de intervalo ha generado controversia desde que Stevens introdujera su propuesta en 1946 (Gardner, 1975; Knapp, 1990; Cohen *et al.*, 2002).

La formulación de las etiquetas lingüísticas utilizadas en la escala es también foco de análisis (y concretamente objeto de estudio en esta aplicación), debido, entre otros, a su importancia en la percepción de la distancia entre las categorías. Existen estudios que analizan los conjuntos de etiquetas lingüísticas que deben utilizarse para tratar de garantizar la equidistancia y poder así utilizar estadísticos propios de escalas de intervalo (Casper, 2013).

Otros autores que han detectado este problema han optado por la modelización borrosa de las variables lingüísticas (mencionaremos algunos ejemplos en la siguiente sección).

### 6.2.3 Lógica difusa aplicada en este contexto

La decisión de la medición de la incertidumbre con lógica difusa o con probabilidad es un tema de gran interés en la comunidad científica. Aunque es claro que ambos modelos resultan útiles dependiendo del contexto, es

obvio que las variables que se utilizan en el cuestionario con una u otra metodología varían pudiendo arrojar resultados y conclusiones diferentes.

El diseño del cuestionario es otro campo donde la disyuntiva de si borroso o probabilístico es de interés. Por eso en este experimento se ha querido medir el impacto de la naturaleza de las etiquetas lingüísticas vs. probabilísticas y la relación de los resultados obtenidos con cada una de ellas.

La bibliografía analizada parece mostrar que el uso de las escalas para la medición de la intensidad tiene un factor subjetivo, cultural o conceptual. Esta medición depende de alguna forma de la interpretación que cada persona dé a la etiqueta lingüística utilizada en la escala y existen estudios que muestran que ésta puede ser distinta.

El poder recoger la información dada por una escala de una forma nítida y precisa se plantea como algo no muy realista. Se presenta entonces la necesidad de representar adecuadamente la incertidumbre generada en torno a cada etiqueta lingüística de la escala, lo que se conseguirá mediante la lógica difusa o borrosa presentada por Zadeh en 1965.

La utilización de la lógica borrosa es amplia en muchas disciplinas. Para este trabajo nos hemos concentrado en los campos sociales, donde también encuentra numerosas aplicaciones.

Por ejemplo, relacionada con el marketing y los procesos de decisión de compra, que es uno de los temas del cuestionario de una de las aplicaciones en esta memoria, es interesante la aplicación de la lógica difusa al marketing del comercio electrónico (Yager, 2000) o a la mejora de segmentación de clientes para las estrategias de marketing (Carrasco, Blasco, García-Madariaga y Herrera-Viedma, 2019).

La lógica difusa se utiliza también concretamente en estudios de evaluación o satisfacción, existiendo diversas investigaciones relacionadas con experimentos en la línea de lo aquí presentado. Existen artículos describiendo experimentos tales como asignar de forma libre etiquetas lingüísticas y valores numéricos a las mismas para estudiar su relación (Martínez García y Martínez

Caro, 2010; Wallsten, Budescu y Zwick, 1993) presentar diferentes escalas lingüísticas y completar con la nota numérica para analizar de nuevo la equivalencia y distancia entre ellas (Lalla *et al.*, 2005) u otros en los que se ofrecen escalas numéricas y verbales y se pide que se relacionen ambas (Jaffe-Katz *et al.*, 1989).

Son muchos los autores que han abordado el problema sobre la dimensión numérica de variables lingüísticas. No obstante, no se ha encontrado ningún estudio que plantee concretamente la equivalencia entre la formulación de preguntas expresando el grado de acuerdo con una frase que conlleve una acción y la formulación de la misma pregunta indicando la frecuencia con la que se realiza esta acción. Por lo expuesto anteriormente, encontramos que profundizar en el tipo de relación existente entre etiquetas lingüísticas y etiquetas frecuentistas supuestamente equivalentes es un estudio de interés.

### **6.3 Experimento: diseño y materiales**

Con el objetivo de medir el impacto que tiene el uso de etiquetas lingüísticas frente a frecuentistas, se ha diseñado el experimento que se detalla a continuación.

El instrumento utilizado es un cuestionario que interroga sobre dos temas. El primero consta de 13 preguntas relacionadas con las acciones llevadas a cabo durante el proceso de decisión de compra de un champú ( $C1, C2, \dots, C13$ ) y el segundo se compone de 14 preguntas ( $S1, S2, \dots, S14$ ) sobre la consideración de la sostenibilidad medioambiental en las acciones diarias del entrevistado (ver 10.Anexos). Se tienen por tanto 27 preguntas  $J \in \{1, 2, \dots, 27\}$  donde  $J1 = C1, \dots, J13 = C13, J14 = S1, \dots, J27 = S14$ .

El cuestionario se formula en dos versiones, según la naturaleza de las respuestas (ver en 10.1 y 10.2 cada una de las versiones):

- **Cuestionario lingüístico (*Ling*)**: las respuestas a cada pregunta son definidas mediante el siguiente conjunto de etiquetas lingüísticas:

- MD*. Muy en desacuerdo.
- D*. Bastante en desacuerdo.
- N*. Ni de acuerdo, ni en desacuerdo.
- A*. Bastante de acuerdo.
- MA*. Muy de acuerdo.

Es decir, se tiene  $A_{Ling}$  conjunto de categorías de la variable *Ling* con  $A_{Ling} = \{MD, D, N, A, MA\}$ .

- **Cuestionario frecuentista (*Frec*)**: las respuestas a cada pregunta son definidas mediante frecuencia de realización definidas mediante el siguiente conjunto de etiquetas frecuentistas:

- $\sim 0\%$ . Alrededor del 0% de las veces.
- $\sim 25\%$ . Alrededor del 25% de las veces.
- $\sim 50\%$ . Alrededor del 50% de las veces.
- $\sim 75\%$ . Alrededor del 75% de las veces.
- $\sim 100\%$ . Alrededor del 100% de las veces.

Es decir, se tiene  $A_{Frec}$  conjunto de categorías de la variable *Frec* con  $A_{Frec} = \{\sim 0\%, \sim 25\%, \sim 50\%, \sim 75\%, \sim 100\%\}$ .

Conviene notar que pese a que los conjuntos de etiquetas de ambos experimentos son distintos ( $A_{Ling} \neq A_{Frec}$ ), el orden de las categorías en ambos métodos es idéntico, es decir,  $L_{Ling} = L_{Frec} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

Previo al lanzamiento del campo, se llevó a cabo un test de ambas versiones del cuestionario para asegurar la correcta expresión y comprensión de cada pregunta, así como la equivalencia semántica de ambos cuestionarios. Con el análisis de los resultados de esta fase de test y los comentarios recibidos se redactaron los cuestionarios finales.

La primera parte del cuestionario se construye en torno a los factores de decisión de compra de un champú, conteniendo preguntas sobre las diferentes etapas del proceso habitual de compra de un producto (González Lobo y Carrero López, 1997; Howard, 1993; Solé Moro, 2003). La segunda



parte trata diferentes acciones sostenibles de los consumidores descritas en manuales de organizaciones públicas. Las preguntas de ambas secciones son susceptibles de ser formuladas con etiquetas lingüísticas y con etiquetas frecuentistas. Se incluye una pregunta de filtro para asegurar que los encuestados han comprado champú en los últimos doce meses y tienen por tanto criterio para responder a la primera parte del cuestionario.

Se define un público objetivo que permita obtener una muestra suficiente para el análisis por lo que se decide llevar a cabo el estudio en el ámbito de la Universidad. La captación se realiza mediante contactos en colegios mayores, anuncios en diferentes facultades de la Universidad Complutense de Madrid y la publicación del estudio en la página de Facebook "Doctorado Matemáticas".

Se recoge una muestra que, tras eliminar las encuestas incompletas y depurar los datos, consta de 95 individuos que completaron ambas fases del estudio. Esta muestra se compone de un 58% de estudiantes con perfil de ciencias y un 42% con perfil de letras, habiendo un 17% de hombres y 83% de mujeres. Este último desbalanceo es probablemente debido a la pregunta de filtro sobre la compra de champú en los últimos doce meses.

La versión lingüística del cuestionario se llevó a cabo mediante encuestas autoadministradas online desarrolladas con el software SurveyMonkey. El cuestionario frecuentista se lanzó dos semanas después.

El análisis de este estudio requiere identificar las respuestas de un mismo entrevistado. Para ello, cada individuo incluyó las iniciales de su nombre y primer apellido y su fecha de nacimiento en ambos cuestionarios de forma que se pudiese generar un identificador único manteniendo el anonimato.

Para poder alcanzar a los mismos individuos en el segundo cuestionario, se les pidió en la primera fase su dirección de correo electrónico. Se utilizó además la mencionada página de Facebook "Doctorado Matemáticas" para que aquellas personas que fuesen reacias a proporcionar este dato, pudiesen

hacerse “fans” de la misma y ser alertadas de forma anónima en su perfil de Facebook cuando se lanzase el segundo cuestionario.

## 6.4 Metodología

La cuestión principal de este estudio es saber si existe algún impacto en las respuestas debido a la naturaleza de las etiquetas y si lo hay analizarlo y tratar de cuantificarlo.

Los resultados del experimento se recogen conjuntamente mediante una variable estadística ordinal bidimensional  $(Ling^J, Frec^J)$  con dominio en  $L_{Ling} = L_{Frec} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  que representa las respuestas dadas por cada individuo al mismo cuestionario con cada una de las metodologías. Dado el individuo  $i$  denotamos  $(ling^J_i, frec^J_i)$  las respuestas dadas por el individuo  $i$ -ésimo a la pregunta  $J$ -ésima en cada una de las versiones lingüística y frecuentista.

Individuo	Ling <sup>1</sup>	Frec <sup>1</sup>	Ling <sup>2</sup>	Frec <sup>2</sup>	...	Ling <sup>J</sup>	Frec <sup>J</sup>	...	Ling <sup>27</sup>	Frec <sup>27</sup>
1	3	3	1	2	...	.	.	...	2	4
2	2	3	5	5	...	.	.	...	4	5
.	.	.	.	.	...	.	.	...	.	.
.	.	.	.	.	...	.	.	...	.	.
.	.	.	.	.	...	.	.	...	.	.
$i$	$ling^1_i$	$frec^1_i$	$ling^2_i$	$frec^2_i$	...	$ling^J_i$	$frec^J_i$	...	$ling^{27}_i$	$frec^{27}_i$
.	.	.	.	.	...	.	.	...	.	.
.	.	.	.	.	...	.	.	...	.	.
.	.	.	.	.	...	.	.	...	.	.
95	2	1	3	4	...	.	.	...	5	4

Tabla 6.1 - Esquema ilustrativo de la base de datos que recoge la variable  $(Ling^J, Frec^J)$

Se tienen por tanto 27 variables estadísticas ordinales bidimensionales. Conviene notar que las variables  $Ling^J$  y  $Frec^J$  son las distribuciones marginales de la variable bidimensional  $(Ling^J, Frec^J)$  que recoge los resultados del experimento conjuntamente. Por lo que también se trabajará con  $27 \times 2 = 54$  variables unidimensionales.

Del cálculo de frecuencias asociadas a las 54 variables unidimensionales se obtienen los vectores de frecuencias  $n_{Ling^J}$  y  $n_{Frec^J}$  y los vectores de frecuencias relativas  $f_{Ling^J}$  y  $f_{Frec^J}$  que recogen los resultados del experimento para cada una de las variables.

Pregunta	Método	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$i_j$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$
1	Ling	10	19	12	37	16	94	11%	20%	13%	39%	17%
1	Frec	8	26	26	20	14	94	9%	28%	28%	21%	15%
2	Ling	7	12	16	37	22	94	7%	13%	17%	39%	23%
2	Frec	3	12	17	40	22	94	3%	13%	18%	43%	23%
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$J$	Ling	$n_{Ling}^J$					$i_J$	$f_{Ling}^J$				
$J$	Frec	$n_{Frec}^J$					$i_J$	$f_{Frec}^J$				
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
27	Ling	13	12	10	21	26	82	16%	15%	12%	26%	32%
27	Frec	8	16	17	24	17	82	10%	20%	21%	29%	21%

Tabla 6.2 - Esquema ilustrativo de los vectores de frecuencias y frecuencias relativas de las distribuciones marginales de ( $Ling^J$ ,  $Frec^J$ )

A continuación se enuncian los análisis que llevaremos a cabo. Presentamos todos los detalles metodológicos en esta sección y mostraremos los resultados obtenidos en la sección siguiente. Comenzamos con un análisis descriptivo de las variables unidimensionales. Seguidamente, analizaremos las discrepancias en las respuestas dadas por cada individuo para cada pregunta y de forma global. Posteriormente estudiaremos la relación entre el impacto de las etiquetas y el consenso generado en la pregunta. Finalmente, en las últimas dos secciones, evaluaremos si existe alguna asimetría en el impacto mediante el análisis de la variable bidimensional ( $Ling^J$ ,  $Frec^J$ ) y estudiaremos cómo es la traslación de opiniones del método lingüístico al método con etiquetas frecuentistas a través de las distribuciones frecuentistas condicionadas a cada una de las categorías lingüísticas.

## Observación 6.2

Es importante mencionar antes de empezar los análisis estadísticos que en esta memoria se tratará de llegar a conclusiones de carácter general a partir de un análisis pormenorizado para cada una de las preguntas. Para poder agregar los diferentes resultados obtenidos en cada una y llegar a rechazar de manera significativa una hipótesis nula global, será necesario que se rechace la hipótesis nula localmente en un número significativo de contrastes locales.

En particular, se llevarán a cabo diferentes contrastes de hipótesis sobre las 27 variables, de los que se tratará de extraer conclusiones a nivel global. En el siguiente análisis se muestra que para poder concluir que existe evidencia

significativa para rechazar la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95%, será necesario que se rechace la hipótesis nula en 19 de las 27 preguntas.

Se define la variable:

$$Y_J = \begin{cases} 1 & \text{si se rechaza la hipótesis nula para la pregunta } J\text{-ésima,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$Y_J \sim \text{Ber}(p).$$

Se puede definir por tanto una variable  $Y = \sum_{J=1}^{27} Y_J$  que representa el número de preguntas significativas. Se tiene que  $Y \sim \text{Bin}(27, p)$ .

Se define  $\bar{Y} = Y / 27$  para la que puede suponerse  $\bar{Y} \sim N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{27}})$  y se define el contraste:  $H_0: p \leq 0.5$  frente a  $H_1: p > 0.5$ .

Bajo  $H_0$  cierta se tiene que  $\bar{Y} \sim N(0.5, 0.096)$ . Por tanto para rechazar la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95% ha de cumplirse que  $\frac{\bar{Y} - 0.5}{0.096}$

$> 2 \Rightarrow \bar{Y} > 0.7 \Rightarrow Y > 18$ . Por tanto, para poder afirmar de forma general que se rechaza la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95%, ha de cumplirse en al menos 19 de las 27 preguntas.

### Observación 6.3

En esta sección trabajaremos con una matriz de pesos  $W^\alpha$  definida mediante el vector  $\alpha = (1, 1.5, 2)$  y que notaremos como  $W0$ .

#### 6.4.1 Análisis de variables unidimensionales

Como un primer paso para tener conocimiento sobre las características generales y la población de estudio se hará un análisis de estas variables

unidimensionales correspondientes a cada pregunta y metodología en base a la naturaleza de las etiquetas.

#### Análisis descriptivo

Para cada pregunta  $J$  se mostrará un gráfico contrastando ambas distribuciones. A continuación se mostrará para cada método y cada pregunta  $J$ , medidas de tendencia central propias de variables ordinales.

Finalmente, con el objetivo de entender mejor la distribución, se incluirán además los gráficos de frecuencias acumuladas para ambas variables.

#### Homogeneidad marginal

Si las distribuciones de las respuestas por pregunta con cada uno de los métodos no son homogéneas quiere decir que existe algún tipo de impacto de la naturaleza de las etiquetas. Se analizará por tanto la homogeneidad de las distribuciones marginales para detectar si existen diferencias significativas entre las mismas.

La homogeneidad marginal de ambos métodos se analiza mediante la extensión de Stuart (1955) y Maxwell (1970) al test de McNemar (1947). Se contrasta si las diferencias entre las proporciones marginales son significativas, es decir, si las proporciones de las respuestas lingüísticas frente a las respuestas frecuentistas son significativamente distintas.

La hipótesis nula es  $H_0: p_{i\bullet} = p_{\bullet i}$  con  $i=1,\dots,5$ , y se calcularán los p-valores para cada pregunta  $J \in \{1,2,\dots,27\}$ .

Tras realizar el contraste para cada pregunta, analizaremos el número de preguntas para las que se rechaza la hipótesis nula para poder llegar a una conclusión de carácter global. Tal y como se explicó en la Observación 6.2, tendría que rechazarse la hipótesis nula en 19 de las 27 preguntas.

#### **Observación 6.4**

Conviene resaltar que en caso de que no hubiera diferencias significativas en las distribuciones marginales, esto no sería una condición suficiente para afirmar que no exista impacto de la naturaleza de las etiquetas. En la Tabla

6.3 se muestra un ejemplo ficticio extremo de 2 poblaciones que han realizado el mismo experimento con 2 métodos diferentes. Ambas poblaciones tienen una distribución polarizada con el 50% de la muestra en cada extremo con cada método y por tanto las distribuciones marginales son idénticas. No obstante, en la primera población las opiniones se mantuvieron idénticas con ambos métodos mientras que en la segunda población se dio un salto radical en las opiniones de todos los individuos.

		Método 2					
Método 1	Población 1	f1	f2	f3	f4	f5	
	f1	50	0	0	0	0	50
	f2	0	0	0	0	0	0
	f3	0	0	0	0	0	0
	f4	0	0	0	0	0	0
	f5	0	0	0	0	50	50
		50	0	0	0	50	100

		Método 2					
Método 1	Población 2	f1	f2	f3	f4	f5	
	f1	0	0	0	0	50	50
	f2	0	0	0	0	0	0
	f3	0	0	0	0	0	0
	f4	0	0	0	0	0	0
	f5	50	0	0	0	0	50
		50	0	0	0	50	100

Tabla 6.3 - Ejemplo de homogeneidad marginal como condición no suficiente

Por tanto, parece necesario hacer un análisis detallado de las discrepancias entre las respuestas dadas por los individuos.

#### 6.4.2 Discrepancias (cambios de opinión)

Con el objetivo de medir el impacto de la naturaleza de las etiquetas sobre las respuestas dadas a cada pregunta se define a continuación una nueva variable:

**Definición 6.1: Discrepancia entre los métodos Ling y Frec para la pregunta  $J$ :**

Sean  $L_{ling} = L_{frec} = \{1, \dots, 5\}$  los órdenes de las categorías asociados a los conjuntos de etiquetas  $A_{ling}$  y  $A_{frec}$  y sean  $ling^j_{i \in L_{ling}}$  y  $frec^j_{i \in L_{frec}}$  las respuestas dadas por un individuo  $i$  a una pregunta  $J$  con cada uno de los dos métodos. Se define entonces la discrepancia entre el método lingüístico y el frecuentista para la pregunta  $J$  como:

$$D^j: L_{ling} \times L_{frec} \rightarrow \{0, 1\}$$

$$(ling^j_i, frec^j_i) \rightarrow D^j_i = \begin{cases} 1 & \text{si } ling^j_i \neq frec^j_i, \\ 0 & \text{si } ling^j_i = frec^j_i. \end{cases}$$

### Análisis global

Para poder llevar a cabo algunos análisis descriptivos globales, se estudiará la discrepancia media por individuo, es decir, el porcentaje de preguntas para las que en promedio los individuos no dan respuestas equivalentes. Para ello, se calcula inicialmente la discrepancia media por individuo, es decir, el porcentaje de preguntas que cada individuo contesta de forma diferente. Posteriormente se calcula la media muestral en todos los individuos. Dado que en la recogida de datos ha habido algunos valores nulos para algunas preguntas, se introduce la variable  $j_i$  que refleja el número de preguntas contestadas por el individuo  $i$ -ésimo. Conviene notar que  $D^j_i(ling^j_i, frec^j_i)$  es nulo si el individuo  $i$ -ésimo no respondió la pregunta  $J$ -ésima. Entonces:

Discrepancia media del individuo  $i$ -ésimo:  $D_i = \frac{1}{j_i} \sum_{j=1}^{27} D^j_i(ling^j_i, frec^j_i) .$

Discrepancia promedio:  $\bar{D} = \frac{1}{95} \sum_{i=1}^{95} D_i .$

Se quiere además evaluar si las discrepancias en función del tema son diferentes, para ello se calculan las medidas anteriores por bloques de preguntas. Para reflejar el número de preguntas contestadas por cada individuo en cada tema, Champú y Sostenibilidad, se utilizarán las variables  $c_i$  y  $s_i$  respectivamente. Entonces:

Discrepancia media del individuo  $i$ -ésimo por tema:

$$\text{Champú: } D_i^C = \frac{1}{c_i} \sum_{J=1}^{13} D_i^J(ling_i^J, freq_i^J).$$

$$\text{Sostenibilidad: } D_i^S = \frac{1}{s_i} \sum_{J=14}^{27} D_i^J(ling_i^J, freq_i^J).$$

Discrepancia promedio por tema:

$$\text{Champú: } \bar{D}^C = \frac{1}{95} \sum_{i=1}^{95} D_i^C.$$

$$\text{Sostenibilidad: } \bar{D}^S = \frac{1}{95} \sum_{i=1}^{95} D_i^S.$$

Análisis por pregunta

A continuación se analizarán las discrepancias promedio por pregunta ( $D^J$ ). De nuevo, teniendo en cuenta que puede haber valores nulos, se utilizará la variable  $i_J$  para representar el número de individuos que dieron respuesta a la pregunta  $J$ -ésima:

$$\text{Discrepancia media por pregunta: } D^J = \frac{1}{i_J} \sum_{i=1}^{95} D_i^J(ling_i^J, freq_i^J).$$

Finalmente se estimarán los intervalos de confianza para cada pregunta y se mostrará en un gráfico el ranking significativo de preguntas.

#### 6.4.3 Relación entre el impacto de las etiquetas y el consenso generado en la pregunta

Otro de los objetivos de esta memoria es tratar de explicar el impacto de la etiqueta en una pregunta dada en función del consenso existente con cada método. Teniendo en cuenta que el impacto de la etiqueta se ha recogido mediante la variable discrepancia  $D^J$  y que el consenso se define como medida opuesta a la dispersión, se llevará a cabo un análisis de las variables discrepancia y dispersión.



El análisis de la discrepancia por pregunta fue estudiado en la sección anterior por lo que en esta sección se analizará la dispersión por pregunta y método.

### Análisis de la dispersión por pregunta y método

Se comenzará por calcular la dispersión por pregunta y método ( $\Phi_W(f_{Ling}^j)$  y  $\Phi_W(f_{Frec}^j)$ ), que por simplicidad se notará como  $\Phi_W(Ling^j)$  y  $\Phi_W(Frec^j)$ ). Este análisis se realizará utilizando como medidas de dispersión tanto la entropía como las medidas de dispersión ordinal propuestas en el capítulo 4 de esta memoria. Concretamente se trabajará con 4 medidas, dos sin referencia y dos con referencia la mediana única y cada una de ellas calculada con 2 matrices de pesos: la generada por el vector unitario  $\alpha = (1,1,1)$  que es equivalente a la diferencia en valor absoluto (ver Observación 5.4) y la definida mediante el vector  $\alpha = (1, 1.5, 2)$  que se ha notado como  $W0$  (ver Observación 6.3). Es decir, se analizará con  $\Phi_{||}$ ,  $\Phi_{W0}$ ,  $\Phi_{||,Med\_u}$  y  $\Phi_{W0,Med\_u}$ .

Se quiere ver si la naturaleza de las etiquetas (método) tiene un impacto en el consenso. Dado que el consenso se calcula para cada pregunta, se querrá comprobar si el consenso esperado con etiquetas lingüísticas es significativamente distinto del consenso esperado con etiquetas frecuentistas. Para ello se hace un análisis de medias pareadas donde  $\mu_{\Phi_W(LingJ)}$  denota el consenso esperado con el método lingüístico y  $\mu_{\Phi_W(FrecJ)}$  refleja el consenso esperado con el método frecuentista.

Este contraste de diferencias de medias pareadas se define con la hipótesis nula  $H_0: \mu_{\Phi_W(LingJ)} - \mu_{\Phi_W(FrecJ)} = 0$  frente a  $H_1: \mu_{\Phi_W(LingJ)} - \mu_{\Phi_W(FrecJ)} \neq 0$  y detecta si existen diferencias significativas entre las medias de ambos métodos. Se contrastará mediante una t-Student, pero para poder aplicarlo, debe verificarse previamente que cada una de las muestras sigan una distribución normal y que sus varianzas sean iguales. Para contrastar la normalidad se utilizará el contraste de Shapiro – Wilk y para contrastar la homocedasticidad (o igualdad de varianzas), se aplicará el test F de Fisher. Esto se llevará a cabo con cada una de las medidas de dispersión bajo análisis detalladas anteriormente.

### Relación entre discrepancia y dispersión

Para estudiar la relación entre la discrepancia y la dispersión por pregunta, se comenzará con un análisis descriptivo mediante un gráfico XY que muestre por pregunta el promedio de las dispersiones lingüística y frecuentista frente a la discrepancia.

Posteriormente se estimará el grado de discrepancia mediante modelos de regresión lineal múltiple con estimación de parámetros mínimo cuadrática para analizar en qué grado la discrepancia puede ser explicada mediante una combinación lineal de las dispersiones lingüística y/o frecuentista. El modelo tendrá por tanto la formulación siguiente:

$$Y = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + \varepsilon,$$

donde la variable respuesta es:

$$Y = \text{Discrepancia por pregunta } (D^j).$$

Y se introducen como variables explicativas:

$X_1$ : Dispersión por pregunta con el método lingüístico,

$X_2$ : Dispersión por pregunta con el método frecuentista,

$\varepsilon$ : Error del modelo,

y se estimarán los coeficientes del modelo  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$ .

Conviene notar que se trabajarán 5 modelos distintos, uno para cada medida de dispersión detallada en la sección anterior (Entropía,  $\Phi_{||}$ ,  $\Phi_{W0}$ ,  $\Phi_{||,Med\_u}$  y  $\Phi_{W0,Med\_u}$ ).

#### 6.4.4 Asimetría en el impacto

Para dar respuesta al objetivo de analizar en detalle la traslación de las respuestas dadas con etiquetas lingüísticas a etiquetas frecuentistas (O3), se llevará a cabo un análisis de la variable bidimensional  $(Ling^j, Frec^j)$  para cada pregunta  $j$  y se evaluarán las diferencias en las respuestas.

### Análisis descriptivo de la variable bidimensional ( $Ling^j, Frec^j$ )

En un primer análisis descriptivo se calcularán las tablas de contingencia 5x5 de la muestra para cada pregunta y se mostrarán los gráficos de los resultados mediante gráficos de burbujas.

A continuación se llevarán a cabo los siguientes análisis:

#### Independencia de métodos

Para comenzar se estudiará la independencia entre los métodos, aunque resulte en cierto modo evidente. Se realiza por tanto un contraste de independencia chi-cuadrado en el que contrastaremos la hipótesis nula de independencia  $H_0: p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j} \forall i,j$  con el estadístico de Pearson que, bajo la hipótesis nula, tiene una distribución de probabilidad asintótica  $\chi^2_{4*4}$ .

#### Diferencia

Con el objetivo de estudiar si existe algún tipo de tendencia o asimetría al trasladar las respuestas dadas con etiquetas lingüísticas a etiquetas frecuentistas, se profundizará en los cambios de opinión (medidos anteriormente con la discrepancia, ver 6.4.2) para estudiar la dirección e intensidad de estos cambios, es decir, se analizará la diferencia entre las respuestas de ambos métodos.

#### **Definición 6.2: Diferencia entre los métodos $Ling$ y $Frec$ ( $Diff^j$ )**

Sean  $L_{Ling} = L_{Frec} = \{1, \dots, 5\}$  los órdenes de las categorías asociados a los conjuntos de etiquetas  $A_{Ling}$  y  $A_{Frec}$  y sean  $ling^j_{i \in L_{Ling}}$  y  $frec^j_{i \in L_{Frec}}$  las respuestas dadas por un individuo  $i$  a una pregunta  $j$  con cada uno de los dos métodos. Se define entonces la diferencia entre el método lingüístico y el frecuentista como:

$$Diff^j: L_{Ling} \times L_{Frec} \rightarrow \{-4, \dots, 0, \dots, 4\}$$

$$(ling^j_i, frec^j_i) \rightarrow Diff^j(i) = ling^j_i - frec^j_i.$$

Se llevará a cabo un análisis descriptivo de esta nueva variable mostrando el gráfico de distribución para cada pregunta, señalando la moda y la mediana y visualizando estas distribuciones mediante un diagrama de caja.

### Contraste de proporciones para las discrepancias laterales

Para estudiar las posibles asimetrías, se definen a continuación las siguientes variables:

#### **Definiciones: Discrepancias laterales del método lingüístico vs. el frecuentista para la pregunta $J$ ( $D_{L \geq F}^J$ y $D_{L \leq F}^J$ ):**

Sean  $L_{ling} = L_{frec} = \{1, \dots, 5\}$  los órdenes de las categorías asociados a los conjuntos de etiquetas  $A_{ling}$  y  $A_{frec}$  y sean  $ling^j_{i \in L_{ling}}$  y  $frec^j_{i \in L_{frec}}$  las respuestas dadas por un individuo  $i$  a una pregunta  $J$  con cada uno de los dos métodos.

Se definen entonces las discrepancias laterales del método lingüístico vs. el frecuentista para la pregunta  $J$  como:

#### Definición 6.3 Discrepancia lateral superior para la pregunta $J$ ( $D_{L \geq F}^J$ )

$$D_{L \geq F}^J: L_{ling} \times L_{frec} \rightarrow \{0, 1\}$$
$$(ling^j_i, frec^j_i) \rightarrow D_{L \geq F}^J(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } ling^j_i \geq frec^j_i, \\ 0 & \text{si } ling^j_i < frec^j_i. \end{cases}$$

#### Definición 6.4 Discrepancia lateral inferior para la pregunta $J$ ( $D_{L \leq F}^J$ )

$$D_{L \leq F}^J: L_{ling} \times L_{frec} \rightarrow \{0, 1\}$$
$$(ling^j_i, frec^j_i) \rightarrow D_{L \leq F}^J(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } ling^j_i \leq frec^j_i, \\ 0 & \text{si } ling^j_i > frec^j_i. \end{cases}$$

Para cada tipo de discrepancia lateral y cada pregunta  $J$  ( $D_{L \geq F}^J$  ,  $D_{L \leq F}^J$ ) calcularemos la media ( $\bar{D}_{L \geq F}^J$  ,  $\bar{D}_{L \leq F}^J$ ) y el intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95% y ordenaremos estos intervalos de menor a mayor según el límite inferior del intervalo.

A continuación se definen los siguientes contrastes de hipótesis para cada una de las discrepancias laterales:

**Contraste  $D_{L \geq F}^J$**   $H_0: P(D_{L \geq F}^J) \leq p_1^*$  frente a  $H_1: P(D_{L \geq F}^J) > p_1^*$ .

**Contraste  $D_{L \leq F}^J$**   $H_0: P(D_{L \leq F}^J) \leq p_2^*$  frente a  $H_1: P(D_{L \leq F}^J) > p_2^*$ .

El objetivo de estos contrastes es determinar los valores límite  $p_1^*$  y  $p_2^*$  tales que permitan rechazar cada hipótesis nula de forma global con un valor de significación de  $\alpha = 0.05$ . A continuación se estudiará si existe algún desvío entre  $p_1^*$  y  $p_2^*$ .

Para determinar estos valores, recordemos primero la Observación 6.2 sobre el número significativo de contrastes locales necesarios para poder concluir que también se rechaza la hipótesis nula a nivel global. Tal y como se explicó en esta observación, es necesario rechazar la hipótesis nula en al menos 19 de las 27 preguntas para poder rechazar la hipótesis nula de forma global. Hay que tener en cuenta que las preguntas se han ordenado de forma creciente según el extremo inferior del intervalo de confianza de la media. Por tanto, si tomamos como  $p_1^*$  o  $p_2^*$  el extremo inferior del noveno intervalo de confianza, se puede afirmar que se rechaza la hipótesis nula en las 19 preguntas siguientes del listado ordenado (de la novena pregunta a la vigesimoséptima) y por tanto se podrá afirmar a nivel global que se rechaza la hipótesis nula con un nivel de confianza del 95%. Se analizará entonces si estos valores  $p_1^*$  o  $p_2^*$  son similares entre ellos o existe algún tipo de desvío.

#### 6.4.5 Traslación de opiniones

El objetivo de esta sección es analizar cómo se producen las discrepancias laterales introducidas en el apartado anterior y más concretamente entender si existe algún patrón en la translación de respuestas dadas por cada individuo de una metodología a otra.

Conviene recalcar que este análisis en profundidad se realizará a nivel individuo, es decir, se examinarán por individuo los cambios de opinión que se producen al pasar de etiquetas lingüísticas a etiquetas frecuentistas. Para ello, se estudiarán las distribuciones frecuentistas condicionadas a las

diferentes categorías lingüísticas para cada pregunta  $J$ :  $Frec^J|_{Ling=MD}$ ,  $Frec^J|_{Ling=D}$ ,  $Frec^J|_{Ling=N}$ ,  $Frec^J|_{Ling=A}$  y  $Frec^J|_{Ling=MA}$ .

Nótese que únicamente se han estudiado aquellos casos en los que el tamaño muestral de la distribución frecuentista condicionada a cada etiqueta es de al menos 5 individuos.

### Análisis gráfico de las distribuciones condicionadas

En esta sección se trabajará por tanto para cada una de las 27 preguntas con 5 distribuciones frecuentistas condicionadas a los valores de cada etiqueta lingüística. Se comenzará con un breve análisis gráfico de estas distribuciones.

### Análisis del consenso

Tal y como se ha mencionado anteriormente (ver 4.1), son varios los autores que han trabajado en la problemática de la distancia en escalas ordinales y la suposición de equidistancia entre las categorías. Igualmente existen estudios sobre el comportamiento en categorías extremas, ya que parece haber diferencias interesantes. En este trabajo también se querrá analizar en profundidad estas categorías y detectar si existe algún patrón en la traslación de las respuestas extremas lingüísticas a las respuestas frecuentistas.

Se estudiará por tanto el consenso de la distribución frecuentista al trasladar las opiniones dadas con etiquetas lingüísticas.

Nótese que este análisis es diferente al descrito en la sección 6.4.3 sobre el análisis de medias pareadas para estudiar la dispersión con cada método ya que en este caso se está estudiando la dispersión de las respuestas frecuentistas dadas únicamente por aquellos individuos que contestaron una categoría lingüística concreta y prefijada. Es decir, se estudia la dispersión de la distribución frecuentista condicionada a cada etiqueta lingüística.

Para ello, lo primero será calcular la dispersión de cada una de las distribuciones condicionadas por pregunta con las diferentes medidas propuestas en esta memoria. Es decir, se calculará  $\Phi_W(f_{Frec^J|_{Ling=MD}})$ , ...,

$\Phi_W(f_{Frec^J}|_{Ling=MA})$  que por simplicidad notaremos como  $\Phi_W(Frec^J|_{Ling=MD})$ , ...  $\Phi_W(Frec^J|_{Ling=MA})$  donde  $\Phi_W$  serán las medidas de dispersión ordinales  $\Phi_{||}$  y  $\Phi_{W0}$  y se calculará además con la entropía.

A continuación se llevará a cabo un diseño de experimentos bifactorial tomando como variable respuesta la dispersión (como medida opuesta al consenso), como factores las categorías a las que se condiciona cada distribución y como bloque (factor no deseado) las preguntas. Es necesario realizar previamente un test ANOVA para detectar si efectivamente existen diferencias significativas en la variable de respuesta. Posteriormente, con el objetivo de ordenar los consensos/dispersiones asociados a las diferentes categorías, se llevará a cabo un ranking siguiendo el método de Newman-Keuls de comparaciones múltiples (Newman, 1939; Keuls, 1952) para agrupar las medidas significativamente distintas entre las categorías de respuesta.

## **6.5 Resultados**

Por tanto, en el experimento realizado se tienen 95 individuos ( $i \in \{1, \dots, 95\}$ ) que contestan 27 preguntas ( $J \in \{1, \dots, 27\}$ ) aplicando el método lingüístico y frecuentista.

### 6.5.1 Análisis de variables unidimensionales

#### Análisis descriptivo

A continuación se muestra para cada pregunta  $J \in \{1, 2, \dots, 27\}$  un gráfico con la distribución de las variables unidimensionales  $Ling^J$  y  $Frec^J$ :

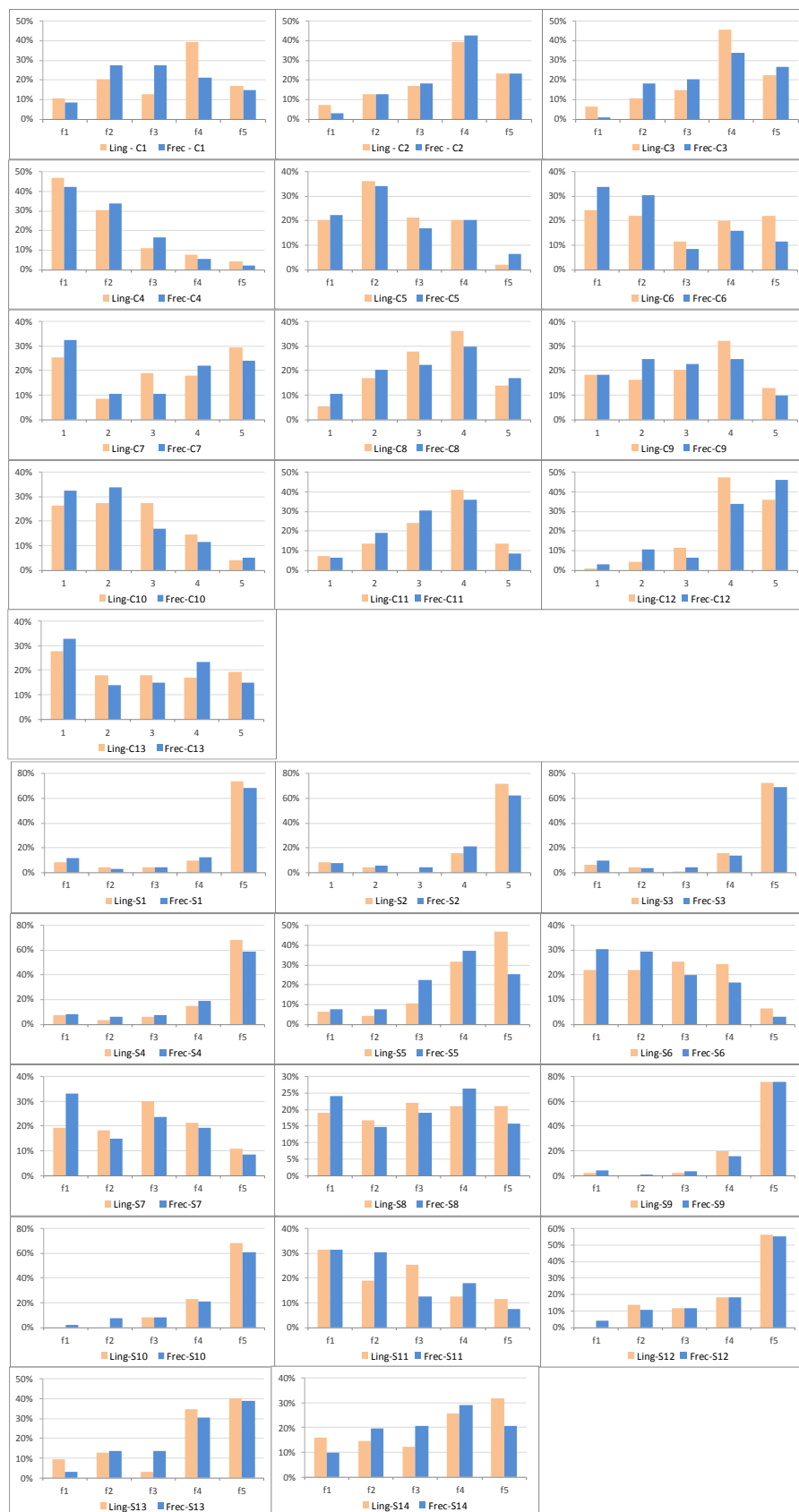


Figura 6.1 – Distribución de *Ling* y *Frec* por pregunta *J*



En algunas preguntas, como por ejemplo la *C1* o la *S5*, se aprecia una diferencia entre las distribuciones de las respuestas dadas con cada método. Tal y como se mencionó en la metodología, tras este apartado de análisis descriptivo, realizaremos un contraste de homogeneidad marginal para cada pregunta *J* para analizar si las diferencias entre las distribuciones son significativas.

A continuación analizaremos las medidas de tendencia central (mediana única, ver Definición 2.4 y la moda) para cada pregunta y método:

Pregunta	Mediana		Moda		Pregunta	Mediana		Moda	
	<i>Ling</i>	<i>Frec</i>	<i>Ling</i>	<i>Frec</i>		<i>Ling</i>	<i>Frec</i>	<i>Ling</i>	<i>Frec</i>
<b>C1</b>	4	3	4	2, 3	<b>S1</b>	5	5	5	5
<b>C2</b>	4	4	4	4	<b>S2</b>	5	5	5	5
<b>C3</b>	4	4	4	4	<b>S3</b>	5	5	5	5
<b>C4</b>	2	2	1	1	<b>S4</b>	5	5	5	5
<b>C5</b>	2	2	2	2	<b>S5</b>	4	4	5	4
<b>C6</b>	3	2	1	1	<b>S6</b>	3	2	3	1
<b>C7</b>	3	3	5	1	<b>S7</b>	3	3	3	1
<b>C8</b>	4	3	4	4	<b>S8</b>	3	3	3	4
<b>C9</b>	3	3	4	2, 4	<b>S9</b>	5	5	5	5
<b>C10</b>	2	2	2, 3	2	<b>S10</b>	5	5	5	5
<b>C11</b>	4	3	4	4	<b>S11</b>	2	2	1	1
<b>C12</b>	4	4	4	5	<b>S12</b>	5	5	5	5
<b>C13</b>	3	3	1	1	<b>S13</b>	4	4	5	5
					<b>C14</b>	4	4	5	4

Tabla 6.4 - Medidas de tendencia central de *Ling* y *Frec* por pregunta *J*

En relación a la mediana única, se observa que suele ser similar con ambos métodos, siendo incluso idéntica en la sección del cuestionario relacionada con el tema de Sostenibilidad para todas las preguntas excepto una (*S6*). Además, se cumple que, cuando no son iguales, la mediana de la variable *Ling<sup>J</sup>* es superior a *Frec<sup>J</sup>*.

Las modas son muy variadas y se aprecia que las preguntas relacionadas con los criterios de selección de un Champú generan distribuciones bimodales, no existiendo ninguna distribución así en las preguntas de Sostenibilidad.

Continuando con el análisis descriptivo, a continuación se muestra un gráfico por pregunta con las frecuencias acumuladas de ambas variables:



Figura 6.2 – Distribución acumulada de *Ling* y *Frec* por pregunta *J*

Cuando se mira en detalle la diferencia entre las frecuencias acumuladas de las categorías 1 a la 4, se aprecia que la distribución lingüística está a menudo por debajo de la frecuentista (concretamente en el 75% de los casos, creciendo al 81% cuando se analizan sólo las categorías 1 a 3). Esto quiere decir que comparativamente parece existir una menor concentración de la distribución lingüística en las categorías bajas de la escala, o equivalentemente, que la distribución lingüística se concentra más que la frecuentista en los valores altos de la escala.

El análisis anterior sobre las frecuencias acumuladas y la relación entre las medianas de la variable *Ling<sup>j</sup>* y *Frec<sup>j</sup>* sugieren una tendencia a expresar un mayor acuerdo con el método lingüístico que con el frecuentista. Esto es algo que abordaremos en la sección sobre la asimetría en el impacto (ver 6.4.4 para explicación metodológica y 6.5.4 para resultados).

#### Homogeneidad marginal

Tal y como se mencionó anteriormente, los gráficos de las distribuciones marginales muestran diferencias acusadas para algunas preguntas (ver Figura 6.1). Al llevar a cabo el contraste de homogeneidad marginal con la extensión de Stuart (1955) y Maxwell (1970) al test de McNemar (1947) se obtienen los p-valores que se muestran a continuación, indicando en rojo aquellos que son inferiores a 0.05:

CHAMPU		SOSTENIBILIDAD	
<b>C1</b>	<b>0,0084</b>	S1	0,5747
C2	0,6824	S2	0,0765
<b>C3</b>	<b>0,0376</b>	S3	0,1556
C4	0,5003	S4	0,4344
C5	0,6297	<b>S5</b>	<b>0,00001</b>
<b>C6</b>	<b>0,0169</b>	<b>S6</b>	<b>0,0388</b>
C7	0,0673	S7	0,0551
C8	0,3446	S8	0,4352
C9	0,1924	S9	0,6518
C10	0,2345	<b>S10</b>	<b>0,0469</b>
C11	0,4463	S11	0,1039
C12	0,0698	S12	0,3904
C13	0,4411	<b>S13</b>	<b>0,0410</b>
		S14	0,0902

Tabla 6.5 - P-valores del contraste de homogeneidad marginal (*resaltado si p-valor < 0.05*)

Así pues, existen 7 de las 27 preguntas realizadas en este estudio para las que existen diferencias significativas en las distribuciones marginales lingüísticas frente a las frecuentistas por lo que se puede afirmar con un nivel de confianza del 95% que en esas preguntas hay un impacto de la naturaleza de las etiquetas.

Tal y como se explicaba en el apartado sobre la metodología, estos resultados no son suficientes para afirmar que de manera sistemática haya diferencias significativas entre los métodos. Para ello hubiera sido necesario rechazar la hipótesis nula en 19 de las 27 preguntas (ver Observación 6.2). No obstante, tal y como se mencionó anteriormente, para poder llegar a una conclusión definitiva sobre el impacto de la naturaleza de las etiquetas es necesario el análisis de discrepancias, ya que podrían existir poblaciones con distribuciones marginales idénticas cuyas respuestas con un método u otro hayan cambiado radicalmente (ver Observación 6.4 y ejemplo en Tabla 6.3).

#### 6.5.2 Discrepancias (cambios de opinión)

##### Análisis global

El análisis del promedio de discrepancias arroja que los entrevistados contestan de manera diferente casi una de cada dos preguntas. Concretamente, el 49.3% de las respuestas dadas por un individuo no coinciden al comparar ambas versiones del cuestionario ( $\bar{D}$ ).

Es claro que de forma natural existiría una cierta discrepancia entre las respuestas dadas por los entrevistados a dos cuestionarios incluso que fueran idénticos. Sería necesario por tanto conocer esta discrepancia natural para poder estimar de forma correcta el porcentaje de respuestas discrepantes debido al cambio en la naturaleza de las etiquetas. No obstante, que haya un cambio de opinión en casi la mitad de las preguntas parece de forma intuitiva un valor excesivamente alto.

Los resultados de la discrepancia promedio por tema,  $\bar{D}^C = 55.6\%$  y  $\bar{D}^S = 43.4\%$ , indican que existe una mayor discrepancia en el tema de Champú vs. Sostenibilidad.

#### Análisis por pregunta

En la Tabla 6.6 se presenta para cada pregunta la discrepancia promedio así como su intervalo de confianza. Se resaltan en rojo y verde las preguntas con mayor o menor discrepancia por tema respectivamente:

CHAMPÚ	D <sup>I</sup>	IC		SOSTENIBILIDAD	D <sup>I</sup>	IC	
C1	60,6%	50,8%	70,5%	<b>S1</b>	<b>23,2%</b>	14,7%	31,6%
C2	52,1%	42,0%	62,2%	S2	32,6%	23,2%	42,1%
C3	52,1%	42,0%	62,2%	S3	27,7%	18,6%	36,7%
C4	52,2%	42,0%	62,4%	S4	32,6%	23,2%	42,1%
C5	55,3%	45,3%	65,4%	S5	47,9%	37,8%	58,0%
C6	60,0%	50,1%	69,9%	S6	58,9%	49,1%	68,8%
<b>C7</b>	<b>46,3%</b>	36,3%	56,3%	<b>S7</b>	<b>62,4%</b>	52,5%	72,2%
C8	54,3%	44,2%	64,3%	S8	54,7%	44,7%	64,7%
C9	57,0%	46,9%	67,1%	<b>S9</b>	<b>26,3%</b>	17,5%	35,2%
<b>C10</b>	<b>63,2%</b>	53,5%	72,9%	S10	36,8%	27,1%	46,5%
<b>C11</b>	<b>64,2%</b>	54,6%	73,9%	<b>S11</b>	<b>60,0%</b>	50,1%	69,9%
C12	53,7%	43,7%	63,7%	S12	46,8%	36,7%	56,9%
<b>C13</b>	<b>51,1%</b>	41,0%	61,2%	S13	45,3%	35,3%	55,3%
				S14	54%	42,9%	64,5%

Tabla 6.6 - Porcentaje de discrepancias e intervalo de confianza por pregunta *J*  
(Rojo: las 2 preguntas discrepancia máxima; Verde: las 2 preguntas discrepancia mínima)

Se observa que la discrepancia es mayor en preguntas relacionadas con la decisión de compra de un champú, tal y como se detectó en la discrepancia promedio por tema.

Para ahondar en detalle sobre esta hipótesis de si las discrepancias de las preguntas relacionadas con la decisión de compra de un champú son significativamente mayores que las discrepancias relacionadas con el tema de sostenibilidad, a continuación se muestra un gráfico de los intervalos de confianza con las preguntas ordenadas de mayor a menor discrepancia.

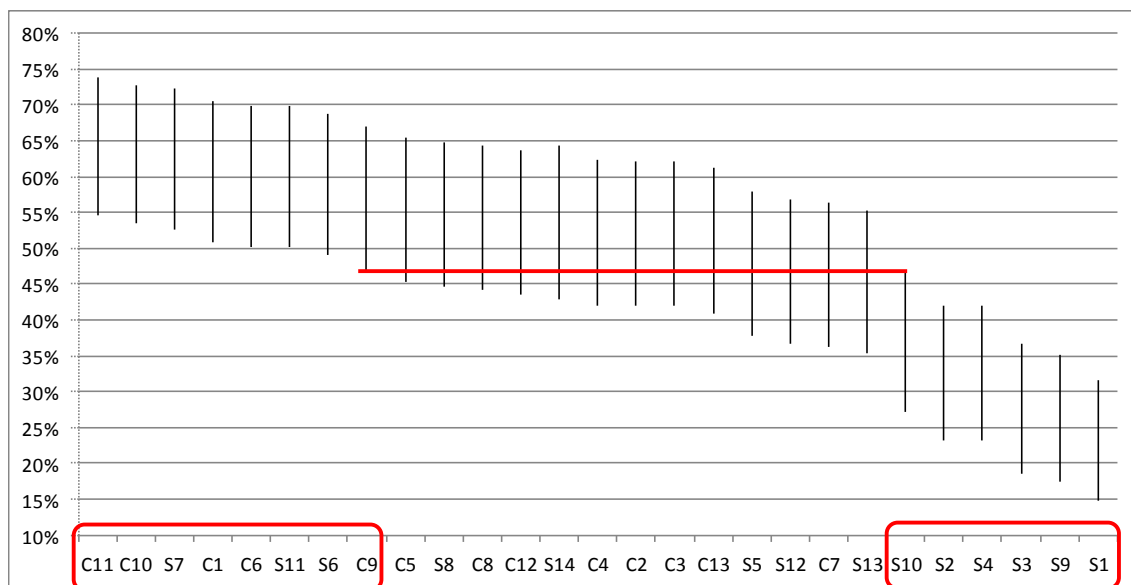


Figura 6.3 – Intervalos de Confianza de la Discrepancia por pregunta (de mayor a menor)

El gráfico anterior permite agrupar algunas de las preguntas  $Discr\_Alta = \{C11, C10, S7, C1, C6, S11, S6, C9\}$  (mayoritariamente preguntas de la sección de Champú) y  $Discr\_Baja = \{S10, S2, S4, S3, S9, S1\}$  (todas ellas del bloque de Sostenibilidad), y concluir que con un nivel de confianza del 95% las preguntas del grupo  $Discr\_Baja$  tendrán una discrepancia menor que las de  $Discr\_Alta$ .

Por tanto, teniendo en cuenta que se ha utilizado la discrepancia como la variable de medida el impacto del cambio en la naturaleza de las etiquetas, puede concluirse que existe discrepancia, que está en torno a 49.3%, y que ésta varía significativamente en función de la pregunta. Además, el impacto que tiene la pregunta en la discrepancia de opiniones por método está relacionado con el tema sobre el que versa la pregunta (Champú o Sostenibilidad) siendo mayor en Champú que en Sostenibilidad.

### 6.5.3 Relación entre el impacto de las etiquetas y el consenso generado en la pregunta

#### Análisis de la dispersión por pregunta y método

La Tabla 6.7 a continuación muestra la dispersión por pregunta y método. Tal y como se mencionó en la metodología, se han incluido la entropía y las

diferentes medidas de dispersión propuestas en el capítulo 4. Se ha utilizado una escala de color por medida y método para mostrar la comparativa de los métodos y las diferentes medidas de dispersión más claramente.

Medida Dispersión Método	Entropía		$\Phi_{  }$		$\Phi_{W0}$		$\Phi_{  , Med u}$		$\Phi_{W0, Med u}$	
	Ling	Frec	Ling	Frec	Ling	Frec	Ling	Frec	Ling	Frec
C1	2,15	2,21	1,39	1,33	2,46	2,29	1,02	0,96	1,81	1,44
C2	2,11	2,00	1,29	1,14	2,18	1,87	0,88	0,77	1,45	1,21
C3	2,01	2,02	1,18	1,20	1,98	1,99	0,78	0,86	1,26	1,36
C4	1,86	1,83	1,14	1,04	1,84	1,57	0,86	0,76	1,20	1,02
C5	2,06	2,17	1,20	1,35	2,04	2,33	0,88	0,99	1,46	1,67
C6	2,28	2,13	1,70	1,51	3,04	2,66	1,35	1,08	2,02	1,79
C7	2,22	2,19	1,74	1,79	3,07	3,26	1,36	1,46	2,04	2,19
C8	2,10	2,25	1,19	1,40	2,00	2,41	0,91	1,05	1,55	1,58
C9	2,25	2,26	1,47	1,42	2,57	2,45	1,11	1,05	1,66	1,58
C10	2,13	2,07	1,27	1,27	2,11	2,10	0,96	0,88	1,52	1,36
C11	2,09	2,06	1,20	1,14	2,03	1,95	0,87	0,84	1,49	1,26
C12	1,66	1,79	0,86	1,11	1,24	1,82	0,59	0,83	0,76	1,17
C13	2,30	2,23	1,67	1,67	2,94	2,97	1,29	1,33	1,93	1,99
S1	1,33	1,46	1,04	1,20	1,86	2,14	0,64	0,77	1,15	1,37
S2	1,26	1,59	1,00	1,11	1,77	1,88	0,62	0,75	1,08	1,24
S3	1,28	1,44	0,92	1,11	1,58	1,94	0,56	0,70	0,96	1,22
S4	1,47	1,73	1,04	1,23	1,76	2,12	0,66	0,86	1,12	1,46
S5	1,83	2,07	1,14	1,24	1,83	2,03	0,85	0,85	1,18	1,34
S6	2,21	2,10	1,38	1,29	2,37	2,15	1,03	0,94	1,55	1,47
S7	2,25	2,19	1,41	1,50	2,40	2,59	1,00	1,18	1,50	1,77
S8	2,32	2,28	1,59	1,60	2,76	2,81	1,18	1,21	1,77	1,82
S9	1,00	1,14	0,53	0,70	0,72	1,11	0,33	0,42	0,43	0,65
S10	1,16	1,60	0,59	0,98	0,72	1,57	0,40	0,68	0,48	1,07
S11	2,22	2,15	1,50	1,42	2,56	2,46	1,17	1,02	1,89	1,66
S12	1,67	1,82	1,11	1,22	1,85	2,06	0,83	0,90	1,36	1,51
S13	1,92	2,00	1,37	1,24	2,40	2,06	0,97	0,89	1,52	1,33
S14	2,23	2,25	1,61	1,42	2,85	2,45	1,21	1,10	2,04	1,88

Tabla 6.7 - Medidas de dispersión por pregunta y método  
(Cada columna muestra una gradación de colores de Microsoft Excel de Verde a Rojo donde Verde indica los valores de dispersión más bajos y Rojo los valores de dispersión más altos)

De manera general se observa un comportamiento similar en la dispersión con las diferentes medidas. Por ejemplo, todas las medidas asignan la mínima dispersión a la pregunta S9. No obstante se aprecian algunas diferencias como que la máxima entropía es alcanzada en la S8 mientras que la máxima dispersión ordinal (con cualquiera de las medidas ordinales) se detecta en la pregunta C7 (distribución más polarizada, ver Figura 6.1). Además, la entropía asigna de forma relativa menor dispersión a las primeras preguntas relacionadas con sostenibilidad (S1 – S4) que las medidas de dispersión ordinales. Esto se debe a que son preguntas con la distribución concentrada en torno a la categoría extrema 5 y por tanto los valores fuera de esta categoría generan mayor dispersión polar (ordinal) que uniforme (entropía). De entre las medidas de dispersión ordinales, las medidas que utilizan la matriz de pesos W0 asignan de forma relativa mayor dispersión ya que

penalizan más las distancias teniendo en cuenta las tendencias subyacentes de la escala.

Cabe destacar que en el bloque sobre Champú, las preguntas C7 y C13, que muestran alta dispersión, son las que arrojan el menor porcentaje de discrepancias (ver Tabla 6.6). Para el tema de sostenibilidad por el contrario coincide que la pregunta S9 que arroja la menor discrepancia es también la que menor dispersión tiene. Esto se analizará en más detalle en el siguiente punto.

A continuación realizamos un contraste de diferencias de medias pareadas para cada una de las medidas de dispersión presentadas anteriormente para ver si la dispersión varía significativamente en función de la naturaleza de las etiquetas utilizadas. Para poder llevar a cabo este contraste es necesario, tal y como mencionamos en la metodología, confirmar la normalidad y la homocedasticidad de varianzas. La Tabla 6.8 muestra los resultados de los tests de Normalidad:

p-value	Shapiro test (Normalidad)
Entropia_Ling	0.001208
Entropia_Frec	0.002783
Phi_Abs_Ling	0.4965
Phi_Abs_Frec	0.8043
Phi_W_Ling	0.1952
Phi_W_Frec	0.8274
Phi_Abs_Med_Ling	0.7713
Phi_Abs_Med_Frec	0.6354
Phi_W_Med_Ling	0.2163
Phi_W_Med_Frec	0.9641

Tabla 6.8 - P-valores del contraste de normalidad de las medidas de dispersión

Para la entropía se rechaza la hipótesis de normalidad por lo que no se podrá aplicar el test de muestras pareadas. A continuación se muestran los resultados de contrastes de homocedasticidad para las medidas restantes:



<b>p-value</b>	<b>F Fisher</b> <i>(Homocedasticidad Varianzas)</i>
Phi_Abs (Ling vs. Frec)	0.1179
Phi_W (Ling vs. Frec)	0.1324
Phi_Abs_Med (Ling vs. Frec)	0.2455
Phi_W_Med (Ling vs. Frec)	0.1593

Tabla 6.9 - P-valores del contraste de similaridad de varianzas de las medidas de dispersión

Con ninguna de las medidas restantes existe evidencia para rechazar la hipótesis de igualdad de varianzas, por lo que se puede aplicar el test de medias pareadas obteniéndose los siguientes resultados:

<b>p-value</b>	<b>t-Student</b> <i>(Medias pareadas)</i>
Phi_Abs (Ling vs. Frec)	0.1754
Phi_W (Ling vs. Frec)	0.2033
Phi_Abs_Med (Ling vs. Frec)	0.2273
Phi_W_Med (Ling vs. Frec)	0.3174

Tabla 6.10 - P-valores del contraste de medias pareadas de las medidas de dispersión

A la vista de estos resultados, no existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de igualdad de medias de la dispersión en función de la metodología, por tanto, no puede concluirse que exista evidencia de alguna tendencia en términos de dispersión al utilizar etiquetas lingüísticas vs. frecuentistas.

Es decir, no hay diferencias significativas en el consenso esperado con cada metodología.

#### Relación entre discrepancia y dispersión

Los siguientes gráficos muestran para cada pregunta el promedio de las dispersiones lingüística y frecuentista frente a la discrepancia entre métodos:

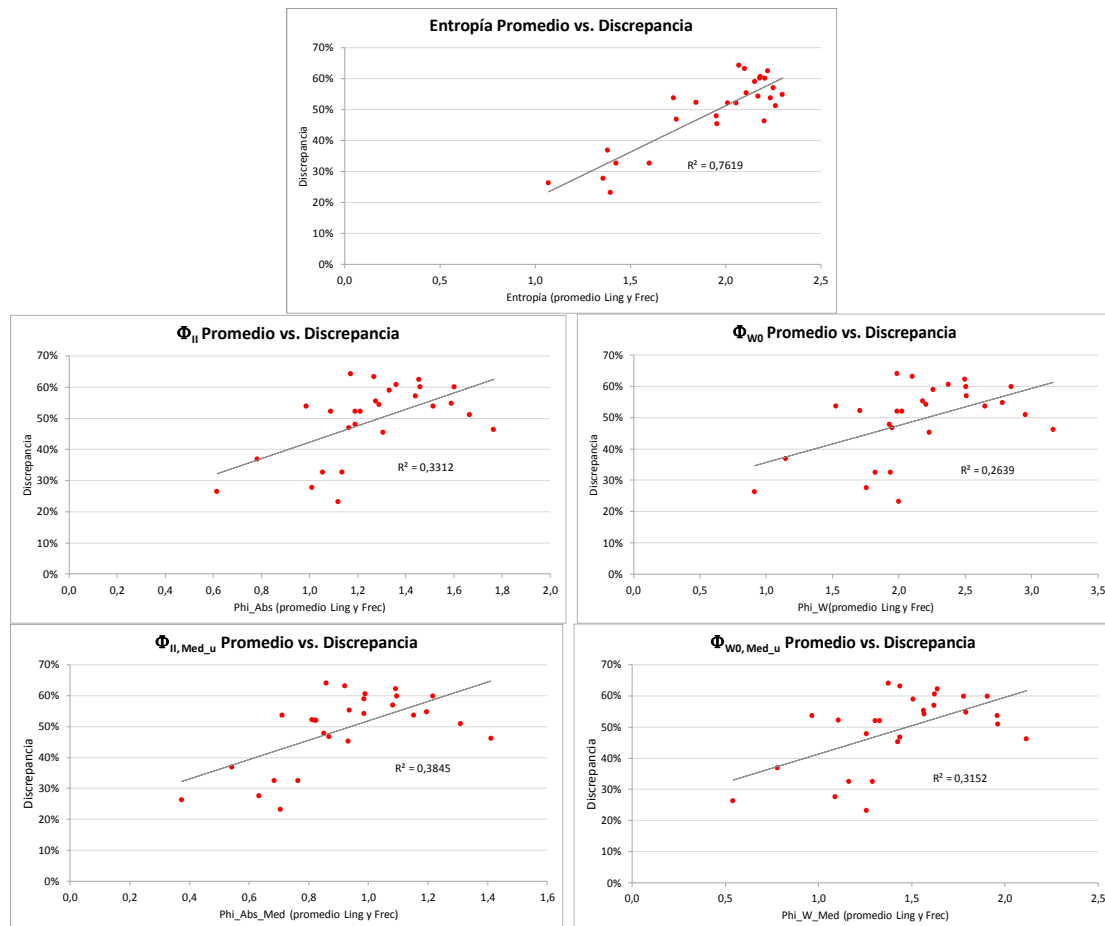


Figura 6.4 – Dispersión promedio (diferentes medidas) vs. Discrepancia por pregunta

Puede observarse que al utilizar métricas de dispersión ordinal sobre los mismos datos, dispersiones ordinales altas no implican tan claramente discrepancias altas. No obstante, esta relación se cumple mucho más claramente con la entropía, medida de dispersión nominal.

La correlación entre la discrepancia y la dispersión calculada con la Entropía (medida de dispersión propia de variables nominales) es claramente mayor (0.76) que la correlación cuando se mide la dispersión con cualquiera de las medidas de dispersión ordinal ( $\Phi_{II} = 0.33$ ,  $\Phi_{W0} = 0.26$ ,  $\Phi_{II,Med_u} = 0.38$  y  $\Phi_{W0,Med_u} = 0.31$ ).

La diferencia fundamental entre las medidas de dispersión nominal y las medidas de dispersión ordinal es que la dispersión máxima nominal se alcanza con una distribución uniforme mientras que la dispersión ordinal es máxima en el caso polar. Intuitivamente a distribuciones uniformes les

corresponderá una mayor discrepancia que a distribuciones polares (lo que explicaría una mejor correlación). Esto se debe a que ante un cambio de etiquetas, cabe esperar que una población repartida más o menos por igual entre todas las categorías de respuesta varíe sus respuestas más que otra población prácticamente dividida por igual en las dos opiniones extremas.

Por tanto, parece que las medidas de dispersión nominal correlacionan mejor con la discrepancia ya que una mayor dispersión nominal supone una mayor discrepancia mientras que esta relación no es tan clara en el caso de medidas de dispersión ordinal.

A continuación se calcularán modelos de regresión multivariante con estimación paramétrica mínimo-cuadrático con las diferentes medidas de dispersión para analizar en qué grado la discrepancia por pregunta puede ser explicada mediante una combinación de las dispersiones lingüística y/o frecuentista. La Tabla 6.11 muestra los modelos de regresión multivariante calculados:

Medida Dispersión	R <sup>2</sup>	$b_0$	$b_1$ (Coef. Ling)	$b_2$ (Coef. Frec)
Entropía	76.6%	-3.22	22.04	5.38
$\Phi_{II}$	40.0%	28.46	35.88	-18.50
$\Phi_{W0}$	33.8%	33.13	16.26	-8.29
$\Phi_{II, Med\_u}$	46.3%	27.89	40.02	-15.71
$\Phi_{W0, Med\_u}$	45.0%	33.19	26.79	-14.92

Tabla 6.11 – Resultados modelos regresión multivariante

De entre las medidas de dispersión analizadas, se observa que la entropía es la medida que mejor modela la discrepancia ya que tal y como se ha visto en los gráficos anteriores cumple una relación más clara. Las medidas de dispersión ordinales  $\Phi_{II}$  y  $\Phi_{II, Med\_u}$  predicen algo peor la discrepancia, funcionando la medida de dispersión ordinal con referencia algo mejor. Las medidas de dispersión con saltos penalizados con la matriz  $W0$  son ligeramente peores cumpliendo igualmente que la medida con referencia funciona mejor.

La dispersión medida con la entropía parece por tanto una buena variable para predecir linealmente la discrepancia, no siendo éste el caso con las medidas de dispersión ordinales que se han evaluado.

#### 6.5.4 Asimetría en el impacto

Con el objetivo de dar respuesta a si existe algún tipo de asimetría o tendencia en la traslación de las respuestas dadas con etiquetas lingüísticas a las respuestas dadas con etiquetas frecuentistas, se comenzará por realizar un análisis descriptivo de la variable bidimensional ( $Ling^J$ ,  $Frec^J$ ) para cada pregunta  $J$ .

#### Análisis descriptivo

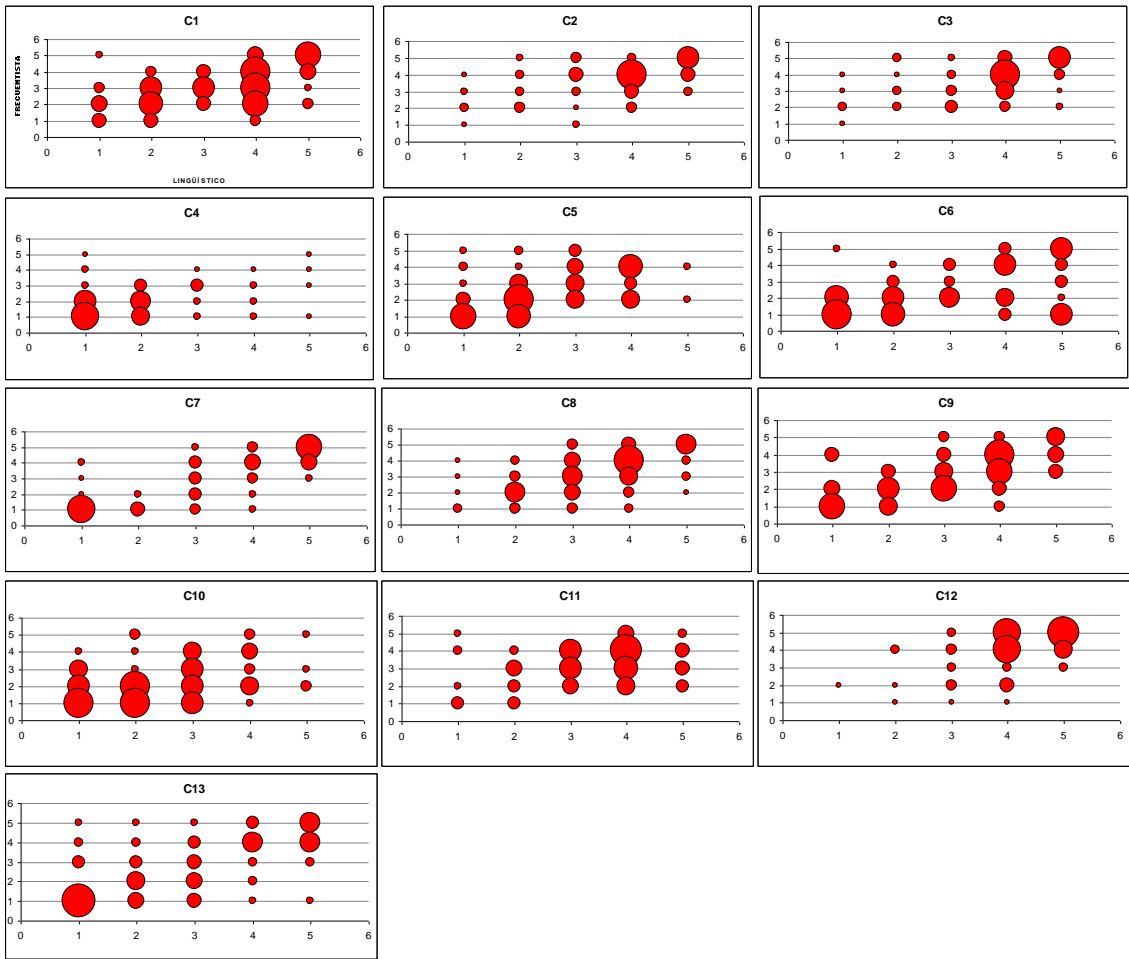
Para cada pregunta se construye la tabla de contingencia 5x5 generada por el experimento (ver 10.3.Tablas de contingencia). La Tabla 6.12 muestra a modo ilustrativo la tabla de la primera pregunta sobre el proceso de decisión de la compra de champú en la que encontramos las respuestas al cuestionario lingüístico en las filas y las respuestas al cuestionario frecuentista en las columnas:

		Frecuentista				
Lingüístico	C1	1 ~ 0%	2 ~ 25%	3 ~ 50%	4 ~ 75%	5 ~ 100%
	1 - MD	3	4	2	0	1
	2 - D	3	8	6	2	0
	3 - N	0	3	6	3	0
	4 - A	2	9	11	11	4
	5 - MA	0	2	1	4	9
		8	26	26	20	14

Tabla 6.12 – Ejemplo de tabla de contingencia de la pregunta 1 de la sección “Champú”

A continuación se incluyen los datos de las tablas de contingencia de cada pregunta en gráficos de burbujas encontrando en el eje horizontal las categorías lingüísticas y en el vertical las frecuentistas:

**Preguntas Champú**



## Preguntas Sostenibilidad

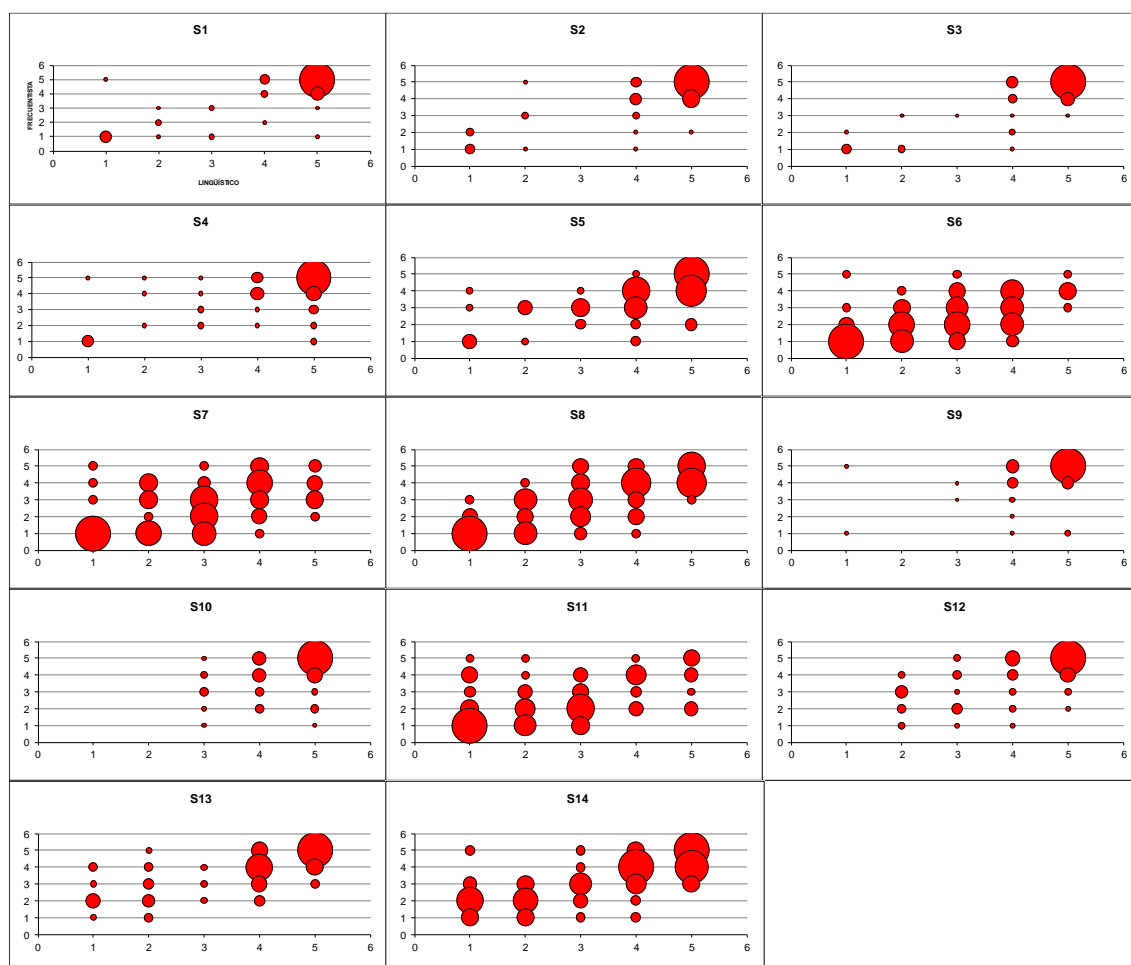


Figura 6.6 –Gráficos de respuestas Lingüísticas vs. Frecuentistas por pregunta (Sostenibilidad)

Se observa, como era de esperar, que en general las diagonales tienen el mayor número de casos. No obstante, se aprecian discrepancias en las respuestas dadas. Se quiere estudiar si existe algún tipo de asimetría o tendencia en esas discrepancias.

A continuación se muestran los resultados de los análisis propuestos en la metodología para el estudio de la variable bidimensional.

### Independencia de métodos

Se obtiene, como era de esperar, que existe evidencia para rechazar la hipótesis nula de independencia en todas las preguntas.

### Diferencia

Los gráficos a continuación muestran la distribución de las diferencias en las respuestas Lingüísticas vs. Frecuentistas para cada pregunta  $J$ :



Figura 6.7 –Distribución de  $Diff^j$

Aunque a priori puede observarse que siguen una distribución con forma de binomial se observa cierta asimetría hacia la derecha en la mayoría de las



preguntas. Estudiaremos esta asimetría mediante el contraste de proporciones descrito en la sección 6.4.4, no obstante analizamos previamente el siguiente diagrama de caja sobre las diferencias, en el que también puede observarse esta asimetría:

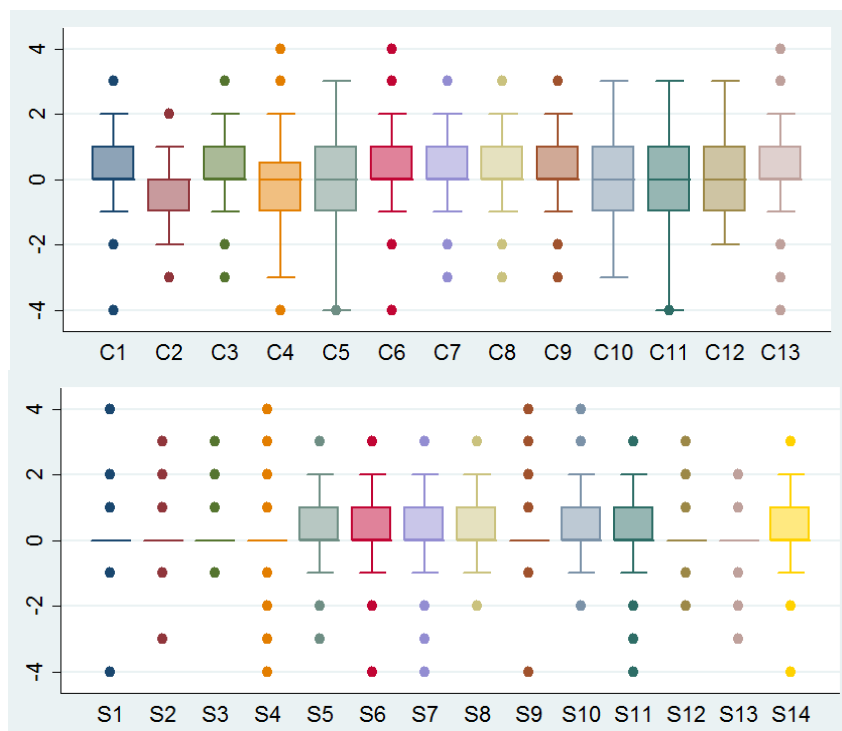


Figura 6.8 – Diagrama de caja de  $Diff^j$  ( $Diff^j(i) = ling^j_i - frec^j_i$ )

A primera vista se observa que las diferencias son muy distintas en función del tema.

En las preguntas relacionadas con sostenibilidad, las diferencias tienen menos dispersión, concentrando incluso toda la muestra en diferencias de 0 (salvo valores atípicos) para la mitad de las preguntas. Para aquellas en las que no es así, se cumple que el rango intercuartílico máximo de las diferencias es de 1 punto, es decir, para esas preguntas el 50% de los encuestados variaron su respuesta como máximo en 1 punto de la escala ordinal. Nótese que, en cada pregunta, el gráfico muestra la distribución de las diferencias  $ling^j_i - frec^j_i$ . Por tanto, teniendo en cuenta que las variables son ordinales, tenemos que  $ling^j_i - frec^j_i = 0$  ó  $ling^j_i - frec^j_i = 1$ . Esto quiere decir que para la mitad de la muestra sucede que o bien las respuestas fueron idénticas, o bien las respuestas lingüísticas tomaron un valor en la escala de un punto más que las respuestas

frecuentistas, lo que se traduce como un punto más en el grado de acuerdo (ver Tabla 6.13 ):

$\text{ling}_i^J = \text{frec}_i^J + 1$			
	$\text{ling}_i^J$	$\text{frec}_i^J$	
Muy en Desacuerdo	1	-	
Bastante en Desacuerdo	2	1	Alrededor del 0% de las veces
Ni de Acuerdo, ni en Desacuerdo	3	2	Alrededor del 25% de las veces
Bastante de Acuerdo	4	3	Alrededor del 50% de las veces
Muy de Acuerdo	5	4	Alrededor del 75% de las veces

Tabla 6.13 - Relación entre las respuestas lingüísticas y frecuentistas dadas a una pregunta por el individuo  $i$ -ésimo

A continuación, para estudiar esta hipótesis sobre la asimetría en profundidad, llevamos a cabo el contraste de proporciones descrito en la sección 6.4.4.

#### Contraste de proporciones para las discrepancias laterales

La Tabla 6.14 muestra para cada pregunta  $J$  el promedio y los intervalos de confianza de las discrepancias laterales del método lingüístico vs. el frecuentista (discrepancia lateral superior  $D_{L \geq F}^J$  y discrepancia lateral inferior  $D_{L \leq F}^J$ ).

Las preguntas se muestran ordenadas de forma creciente según el extremo inferior del intervalo de confianza:

$$D_{L \geq F}^J$$

$$D_{L \leq F}^J$$

PREGUNTA	PROMEDIO	IC MIN	IC MAX	PREGUNTA	PROMEDIO	IC MIN	IC MAX
C2	71,3%	62,1%	80,4%	S6	56,8%	46,9%	66,8%
C12	71,6%	62,5%	80,6%	S7	57,0%	46,9%	67,1%
C4	72,8%	63,7%	81,9%	S5	59,6%	49,7%	69,5%
C5	73,4%	64,5%	82,3%	C6	61,1%	51,2%	70,9%
C11	73,7%	64,8%	82,5%	C9	61,3%	51,4%	71,2%
C10	74,7%	66,0%	83,5%	C10	62,1%	52,3%	71,9%
C3	75,5%	66,8%	84,2%	C11	62,1%	52,3%	71,9%
C1	76,6%	68,0%	85,2%	S11	62,1%	52,3%	71,9%
C8	76,6%	68,0%	85,2%	C1	62,8%	53,0%	72,5%
S13	76,8%	68,4%	85,3%	C7	67,4%	57,9%	76,8%
S14	78,0%	69,1%	87,0%	S8	67,4%	57,9%	76,8%
S12	77,7%	69,2%	86,1%	S14	68,3%	58,2%	78,4%
S11	77,9%	69,6%	86,2%	C13	69,1%	59,8%	78,5%
S8	77,9%	69,6%	86,2%	C8	69,1%	59,8%	78,5%
C6	78,9%	70,7%	87,1%	C5	71,3%	62,1%	80,4%
C13	79,8%	71,7%	87,9%	C3	72,3%	63,3%	81,4%
S7	80,6%	72,6%	88,7%	C12	74,7%	66,0%	83,5%
C9	81,7%	73,9%	89,6%	S10	74,7%	66,0%	83,5%
S6	84,2%	76,9%	91,5%	C4	75,0%	66,2%	83,8%
C7	86,3%	79,4%	93,2%	S12	75,5%	66,8%	84,2%
S10	88,4%	82,0%	94,9%	C2	76,6%	68,0%	85,2%
S2	88,4%	82,0%	94,9%	S13	77,9%	69,6%	86,2%
S9	88,4%	82,0%	94,9%	S4	77,9%	69,6%	86,2%
S4	89,5%	83,3%	95,6%	S2	78,9%	70,7%	87,1%
S3	90,4%	84,5%	96,4%	S3	81,9%	74,1%	89,7%
S5	92,6%	87,2%	97,9%	S1	84,2%	76,9%	91,5%
S1	92,6%	87,4%	97,9%	S9	85,3%	78,1%	92,4%

Tabla 6.14 – Discrepancias laterales método lingüístico vs. frecuentista : Promedios e IC (ordenados de menor a mayor según extremo inferior del IC)

Se recuerda que en la sección de descripción metodológica de los análisis (6.4.4) se definieron los siguientes contrastes de hipótesis para las variables de discrepancias laterales:

Contraste  $D_{L \geq F}^J$   $H_0: P(D_{L \geq F}^J) \leq p_1^*$  frente a  $H_1: P(D_{L \geq F}^J) > p_1^*$ .

Contraste  $D_{L \leq F}^J$   $H_0: P(D_{L \leq F}^J) \leq p_2^*$  frente a  $H_1: P(D_{L \leq F}^J) > p_2^*$ .

Para la variable  $D_{L \geq F}^J$  se tiene que  $p_1^* = 67.9\%$ , es decir, hay al menos 19 de 27 casos (de hecho hay 20 casos) en los que  $P(D_{L \geq F}^J) > 67.9\%$  y por tanto existe evidencia para rechazar la hipótesis nula. Se puede por tanto afirmar que con probabilidad 97,5% (ya que el contraste es unilateral) sucede que  $P(D_{L \geq F}^J) = P(Ling^J \geq Frec^J) > 67.9\%$ .

De forma análoga, para la variable  $D_{L\leq F}^J$  se tiene que  $p_2^* = 52.9\%$  y por tanto existe evidencia para rechazar la hipótesis nula. Se puede por tanto afirmar que con probabilidad 97,5% sucede que  $P(D_{L\leq F}^J) = P(Ling_i^J \leq Frec_i^J) > 52.9\%$ .

Del contraste anterior podemos concluir la existencia de un sesgo hacia un mayor valor de respuesta con escalas lingüísticas que con frecuentistas.

#### 6.5.5 Traslación de opiniones

Tal y como se mencionó en 6.4.5, en esta sección se estudiarán las distribuciones frecuentistas condicionadas a las diferentes categorías lingüísticas para cada pregunta  $J$ :  $Frec^J|_{Ling=MD}$ ,  $Frec^J|_{Ling=D}$ ,  $Frec^J|_{Ling=N}$ ,  $Frec^J|_{Ling=A}$  y  $Frec^J|_{Ling=MA}$ .

#### Análisis gráfico de las distribuciones condicionadas

Para cada pregunta  $J$  se calculan las distribuciones frecuentistas condicionadas a cada etiqueta lingüística (cuando  $n \geq 5$ ). A continuación se incluye una selección de preguntas que arrojan resultados interesantes (ver 10.4 para todos los detalles):



Figura 6.9 –Selección de gráficos de distribuciones frecuentistas condicionadas a cada etiqueta lingüística (Champú)



Figura 6.10 – Selección de gráficos de distribuciones frecuentistas condicionadas a cada etiqueta lingüística (Sostenibilidad)

Para las preguntas mostradas en las figuras anteriores (C6, C9, C13, S7, S8, S14) se ve que la dispersión de los datos frecuentistas correspondientes a la quinta categoría del cuestionario lingüístico ("Muy de Acuerdo") parece mayor que la encontrada alrededor de la primera etiqueta ("Muy en Desacuerdo"). Esto querría decir que las personas que expresaron un grado de acuerdo máximo en el cuestionario lingüístico dieron respuestas frecuentistas más variadas que aquellas que expresaron desacuerdo en el lingüístico, quienes mantuvieron la respuesta frecuentista más concentrada en torno al desacuerdo. En la siguiente sección se llevará a cabo un contraste para confirmar esta hipótesis.

### Análisis del consenso

A continuación se analizará el consenso en la traslación de las respuestas lingüísticas dadas en cada etiqueta al pasar a etiquetas frecuentistas.

Para ello, entendiendo el consenso como la medida opuesta a la dispersión, el primer paso es calcular para cada pregunta y para cada una de las etiquetas lingüísticas la dispersión de las distribuciones frecuentistas condicionadas con la entropía y con las medidas de dispersión ordinal.

A continuación se lleva a cabo un test ANOVA para detectar si existen diferencias significativas en la variable de respuesta:

Pruebas de efectos inter-sujetos						
Origen	Variable dependiente	Tipo III de suma de cuadrados	Gl	Cuadrático promedio	F	Sig.
Ling	Disp_Entro	6.092	4	1.523	15.297	0.000
	Disp_Phi_Abs	1.633	4	0.408	5.430	0.001
	Disp_Phi_W0	7.567	4	1.892	6.306	0.000

Tabla 6.15 - Resultados del Test ANOVA Dispersión

Este test arroja que sí existen diferencias significativas en los resultados de la dispersión por categoría. Estas diferencias se dan con cualquiera de las tres medidas de dispersión analizadas.

La Tabla 6.16 muestra los resultados de aplicar el método de Newman – Keuls de comparaciones múltiples a las diferentes medidas de dispersión para ordenar y agrupar las medidas significativamente distintas:

Subconjuntos homogéneos				
Disp_Entro				
Student-Newman-Keuls <sup>a,b,c</sup>				
Ling	N	Subconjunto		
		1	2	
MA	24	1,317597998883509		
MD	23	1,336617412129838		
D	19		1,747037530224265	
A	27		1,829716168335084	
N	22		1,920361246554212	
Sig.		,840	,160	

Disp_Phi_Abs				
Student-Newman-Keuls <sup>a,b,c</sup>				
Ling	N	Subconjunto		
		1	2	
MA	24	,762457359828973		
MD	23		,937965814675780	
D	19		1,016941516406545	
A	27		1,083848532825120	
N	22		1,134429116835338	
Sig.		1,000	,082	

Disp_Phi_W0				
Student-Newman-Keuls <sup>a,b,c</sup>				
Ling	N	Subconjunto		
		1	2	
MA	24	1,138973852428892		
MD	23		1,576628972793596	
D	19		1,597774913610673	
A	27		1,818487132341492	
N	22		1,923137146069451	
Sig.		1,000	,152	

Tabla 6.16 - Test de Newman-Keuls aplicado a las diferentes medidas de dispersión

Los resultados anteriores muestran que efectivamente las dispersiones en las respuestas extremas son significativamente distintas.

Se encuentra que la entropía recoge un comportamiento significativamente distinto en ambos extremos mientras que las medidas de dispersión ordinal  $\Phi_{||}$  y  $\Phi_{w0}$  captan la asimetría lateral detectada en las secciones anteriores.

Existe por tanto evidencia para afirmar que la etiqueta lingüística de acuerdo máximo (“Muy de Acuerdo”) se corresponde con un mayor rango de respuestas frecuentistas, tal y como se observaba en el análisis descriptivo de las distribuciones condicionadas en la sección anterior.

## **6.6 Conclusiones**

El objetivo principal de este experimento es medir el impacto en los resultados al cambiar la naturaleza de las etiquetas, de etiquetas lingüísticas a frecuentistas, en escalas tipo Likert, para poner de manifiesto la dificultad a la hora de diseñar las etiquetas de una variable ordinal así como computar las discrepancias entre las mismas.

Conviene notar que el marco teórico desarrollado sobre medidas de dispersión ordinal propuestas en esta memoria ha permitido abordar de manera más eficiente el impacto que tiene el uso de un tipo de escala u otro.

Desde un punto de vista aplicado, el diseño de cuestionarios con etiquetas lingüísticas genera valoraciones más positivas que el uso de etiquetas de naturaleza frecuentista.

En este experimento se ha propuesto además una metodología novedosa que con el uso de técnicas tradicionales de Estadística y las medidas propuestas de dispersión ordinal permite analizar el impacto que tiene el uso de diferentes tipos de etiquetas en las respuestas que se producen.

A continuación se detallan la consecución de los objetivos propuestos y cómo este análisis ha dado respuesta a algunas de las preguntas planteadas.

### **6.6.1 Objetivo específico 1 - ¿Influyen las preguntas en el impacto de las etiquetas?**

Para dar respuesta a este objetivo específico, hemos llevado a cabo varios análisis de los que se puede concluir que efectivamente sí, las preguntas influyen en el impacto de las etiquetas. Aunque para algunas el impacto es mínimo, existen otras para las que directamente hay diferencias significativas en las distribuciones por método (ver Tabla 6.5 con contrastes de homogeneidad marginal). Además, un análisis pormenorizado de la discrepancia promedio y su intervalo de confianza para cada pregunta nos ha permitido hacer un ranking significativo de preguntas y mostrar que existen dos grupos con una discrepancia media significativamente distinta: uno con



discrepancia alta (mayoritariamente preguntas de la sección de Champú) vs. otro con discrepancia baja (todas del bloque de Sostenibilidad).

#### 6.6.2 Objetivo específico 2 - ¿Cómo influye el consenso/dispersión previo en el impacto de las etiquetas?

En el experimento desarrollado se ha observado hasta qué punto es posible explicar la discrepancia a través del consenso o equivalentemente de la dispersión. En particular merece la pena destacar que la discrepancia es baja cuando o bien existe mucho consenso de la población concentrada en torno a una categoría o bien cuando, no existiendo consenso, las opiniones estén muy radicalizadas, es decir, cuando se trata de opiniones polares a las que un cambio de naturaleza de la etiqueta no les haga variar su opinión. En el primer caso se tiene una situación de dispersión baja que se corresponde con poca discrepancia (analizada con cualquier medida de dispersión). En el segundo caso, no obstante, se trata de una situación de dispersión polar (máxima con medidas de dispersión ordinales) que se correspondería igualmente con discrepancias bajas. Es por esta razón que las medidas de dispersión ordinales no han obtenido buenos resultados en los modelos de predicción lineal de la discrepancia.

#### 6.6.3 Objetivo específico 3 - ¿Existe algún tipo de tendencia / asimetría en la traslación de las respuestas dadas con etiquetas lingüísticas a las respuestas dadas con etiquetas frecuentistas?

Finalmente, en relación con el último objetivo específico sobre si existe algún tipo de tendencia o asimetría en las respuestas dadas con etiquetas lingüísticas vs. frecuentistas y más concretamente en la traslación que se hace de un tipo de etiquetas a otras llegamos a dos conclusiones principales:

##### Mayor acuerdo con etiquetas lingüísticas que frecuentistas

A lo largo de los análisis de este estudio, hemos detectado varias veces de forma descriptiva una tendencia a expresar un mayor acuerdo con etiquetas lingüísticas que con las frecuentistas. El contraste de discrepancias laterales

confirma que existe una diferencia significativa de 15 puntos entre ambas distribuciones lo que confirma esta tendencia.

A continuación se detallan los análisis que hemos llevado a cabo y que ponen de manifiesto la tendencia mencionada anteriormente:

#### Análisis de las variables unidimensionales (distribuciones marginales)

- Para cada pregunta la mediana de la variable  $Ling^j$  es igual o superior a  $Frec^j$ .
- Las distribuciones marginales acumuladas muestran una menor concentración de la distribución lingüística en las categorías bajas de la escala, o equivalentemente puede decirse que la distribución lingüística se concentra más que la frecuentista en los valores altos de la escala.

#### Análisis de las diferencias por pregunta ( $Diff^j$ )

- En la mayoría de las preguntas hay mayor volumen de diferencias positivas que negativas.
- El diagrama de caja de las diferencias muestra que en 21 de las 27 preguntas sucede que para al menos la mitad de la muestra o bien las respuestas fueron idénticas, o bien las respuestas lingüísticas tomaron un valor en la escala de un punto más que las respuestas frecuentistas, lo que se traduce como un punto más en el grado de acuerdo (salvo valores atípicos).
- El contraste de proporciones realizado para analizar las discrepancias laterales arroja que existe una diferencia significativa de 15 puntos porcentuales entre ambas discrepancias laterales con sesgo hacia un mayor valor con las escalas lingüísticas que con las frecuentistas.

La etiqueta "Muy de Acuerdo" se corresponde con un mayor rango de respuestas frecuentistas

Aunque vemos un patrón hacia un mayor acuerdo en la distribución de las respuestas marginales con el método lingüístico que con el frecuentista, el test de medias pareadas no detecta diferencias significativas en la dispersión de las respuestas. Es decir, las respuestas se trasladan, pero el consenso con uno u otro método no se ve modificado.

No obstante, al profundizar en la traslación de las respuestas que cada individuo hace de un tipo de etiquetas a otras se detecta que las personas que expresaron un grado de acuerdo máximo en el cuestionario lingüístico dieron respuestas frecuentistas más variadas que aquellas que expresaron desacuerdo en el lingüístico, quienes mantuvieron la respuesta frecuentista más concentrada en torno al desacuerdo. Es decir, la percepción de la etiqueta "Muy de acuerdo" se corresponde con más de una escala frecuentista.

La afirmación anterior es posible gracias al uso de las nuevas medidas de dispersión ordinal ya que el análisis utilizando la entropía, propia de medidas de dispersión nominal, no capturaba esta asimetría lateral detectada de forma visual en análisis previos.

## **7 Aplicaciones: Nueva determinación de los pesos OWA basada en medidas de dispersión ordinal**

Una de las técnicas más comunes para encontrar los pesos OWA adecuados está basada en el concepto de *orness*. Los pesos se calculan maximizando la variación mediante la entropía para un valor de *orness* fijo. La entropía, como ya se ha mencionado anteriormente, es una medida de dispersión adecuada para variables nominales. Teniendo en cuenta que los pesos de los operadores OWA pueden ser vistos como medidas ordinales (en lugar de como medidas nominales), en esta sección proponemos una nueva forma de determinar estos pesos basada en las nuevas medidas de dispersión ordinal presentadas en esta memoria en lugar de utilizar la entropía. Presentamos una fórmula explícita para los pesos y mostramos las diferencias realizando varios ejemplos de decisión multicriterio.

Los resultados de esta metodología pueden verse con más detalle en Martínez, Gómez, Olaso, Rojas y Montero (2019).

### **7.1 Introducción**

La agregación es una parte fundamental de la ciencia. El proceso de agregar la información es la herramienta clave en la que se basan la mayoría de los sistemas de conocimiento. En general, se puede decir que la agregación tiene la misión de llegar a una conclusión o decisión, utilizando diferentes fuentes de información. Muchas comunidades investigadoras utilizan este tipo de herramientas tales como la comunidad de decisión multicriterio, la de data mining o la comunidad de investigadores en procesos de agregación, entre otras muchas.

Aunque no sea una suposición necesaria, los operadores de agregación fueron inicialmente definidos para agregar valores asociados a funciones de pertenencia (Calvo, Kolesárová, Komorníková y Mesiar, 2002; Cutello y Montero, 1994, 1999; Gómez y Montero, 2004; Gómez, Rojas, Montero, Rodríguez y Beliakov, 2014; Grabisch, Marichal, Mesiar y Pap, 2009; Rojas,

Gómez, Montero y Rodríguez, 2013) y ésta es la razón por la que son definidos como funciones:  $A: [0,1]^n \rightarrow [0, 1]$  que satisfacen las propiedades de monotonía y presentan dos condiciones de contorno:  $A(0,...,0) = 0$  y  $A(1,...,1) = 1$ . Los operadores de agregación han sido estudiados en profundidad en diferentes disciplinas debido a su gran número de aplicaciones.

Los operadores *ordered weighted averaging* (OWA), introducidos por Yager (1988), son una importante clase de funciones de agregación que han sido discutidas y estudiadas en un numerosos artículos (ver Yager, 1988; Cutello y Montero, 1994, 1995, 1999; De Miguel *et al.*, 2019; Mesiar, Kolesárová, Gómez y Montero, 2019; Montero, González-del-Campo, Garmendia, Gómez y Rodríguez, 2018; entre otros). Algunas de las más notables funciones tales como el máximo, la media aritmética, la mediana y el mínimo pueden ser vistas como casos particulares de operadores de agregación OWA.

Un tema clave de la teoría de los operadores OWA es la determinación de los pesos asociados. Existen diferentes maneras (Liu, 2011) de determinar los pesos de los operadores OWA. O'Hagan (1988) sugiere que el vector de los pesos debe ser aquel que maximiza el operador entropía para un nivel de *orness* fijado. Fuller y Majlender (2003) estudian el mismo problema, transformando el modelo de máxima entropía en una ecuación polinomial que puede ser resuelta de manera analítica. También en este artículo, la entropía se cambia por la varianza clásica para un determinado nivel de *orness* fijado.

Otros enfoques que combinan la dispersión y el *orness* han sido estudiados para determinar los pesos adecuados en un proceso de agregación OWA. Marchant (2006), por ejemplo, propone fijar la variabilidad del peso del operador de agregación (ya que esta variabilidad está asociada con el riesgo) y maximizar el *orness*. Estas situaciones responden a un problema en el cual el decisor prefiere tener un nivel de riesgo fijado y usar un operador tan disyuntivo como sea posible (por ejemplo maximizando el *orness*).

Pero cuando los operadores OWA se usan para agregar los diferentes grados de pertenencia de una secuencia de elementos, los pesos deberían ser vistos

como una variable ordinal ya que el  $i$ -ésimo peso está asociado al  $i$ -ésimo elemento una vez que los grados de pertenencia han sido ordenados.

Aunque un operador de agregación OWA es una función simétrica (es decir,  $OWA(\mu(a)) = (OWA(\mu_1(a), \dots, \mu_n(a)) = OWA(\mu_{\pi(1)}(a), \dots, \mu_{\pi(n)}(a))$ , con  $\pi(i)$  permutación), sus pesos claramente no lo son. Teniendo esto en cuenta, la medida de dispersión debería ser sensible a cambios en el orden de los pesos. De otro modo, vectores como  $w = (0.5, 0, 0, 0.5)$  y  $w' = (0, 0.5, 0.5, 0)$  tendrían la misma dispersión tal y como de hecho sucede cuando se usa la entropía clásica.

Lo que proponemos en esta sección es resolver el problema de la determinación de los pesos en un problema de operadores de agregación OWA utilizando las nuevas medidas de dispersión ordinal propuestas en el capítulo 4 de esta memoria (concretamente se aplicará  $\Phi_{||}$ ) en lugar de una medida de dispersión nominal como es la entropía.

## 7.2 Preliminares

En este apartado, se recuerdan algunos conceptos y propiedades de los operadores de agregación OWA, el concepto de *orness* y el de medida ordinal, utilizados todos ellos a lo largo del resto del capítulo.

### 7.2.1 Operadores de agregación: operadores de agregación OWA

#### **Definición 7.1: Operador de agregación**

Un operador de agregación puede definirse como una función  $A: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  tal que para  $n$  elementos en  $[0, 1]$ , genera un valor de agregación en el mismo intervalo (Beliakov, Gómez, James, Montero y Rodríguez, 2017; Calvo *et al.*, 2002; Gómez y Montero, 2004; Gómez, Rodríguez, Montero, Bustince y Barrenechea, 2016; Montero *et al.*, 2018) y que además satisface las siguientes propiedades:

- $A$  es no decreciente en cada argumento: si  $x_i \leq y$ , entonces  $A(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .
- $A(0, \dots, 0) = 0$ .
- $A(1, \dots, 1) = 1$ .

### **Definición 7.2: Operador de agregación OWA**

Un operador de agregación OWA de dimensión  $n$  es una clase especial de operadores de agregación que se define como una función  $F: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  con un vector de pesos asociado  $w = (w_1, \dots, w_n)$  que cumple las siguientes propiedades:

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i = 1; \quad 0 \leq w_i \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Y tal que  $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}$ , con  $x_{(i)}$  la  $i$ -ésima componente más grande de  $x \in [0,1]^n$ .

Conviene notar que el aspecto clave de los OWA es el paso de reordenación. El peso OWA  $w_i$  no está asociado con la posición original del vector. Si se plantean los pesos OWA como un vector columna sería conveniente colocar los pesos con índices más bajos en la parte superior del vector y los pesos con índices más altos en la parte inferior del vector. Con este nuevo enfoque, diferente de la agregación clásica por la media ponderada, las funciones de agregación OWA han sido ampliamente usadas en inteligencia computacional debido a su facilidad para modelar instrucciones de agregación expresadas lingüísticamente.

#### 7.2.2 Determinación de los pesos OWA mediante la entropía y el orness

Un operador OWA tiene una medida *orness* asociada que representa en cierto modo el grado en el que un operador es disyuntivo. A continuación se presenta la definición formal:

**Definición 7.3: Orness de un operador de agregación OWA**

Dado un operador de agregación OWA con un vector de pesos  $w$ , se define el

*orness* como:  $orness(w) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) w_i$ .

Los conectores compensadores tienen la propiedad de que un alto grado de satisfacción de uno de los criterios puede compensar un grado bajo de satisfacción de otro criterio. “*Oring*” los criterios significa compensación completa y “*anding*” los criterios significa que no hay compensación. Por lo tanto, es claro que el *orness* para  $w_{max} = (1, \dots, 0)$  es 1 (totalmente disyuntiva),  $w_{min} = (0, \dots, 1)$  es 0 (totalmente conjuntiva) y para cualquier otro vector de pesos toma un valor entre 0 y 1, en particular para  $w_{average} = (1/n, \dots, 1/n)$  es 0.5.

O’Hagan (1988) propone determinar los pesos maximizando la entropía del vector de pesos dado un determinado valor de *orness* ( $\alpha$ ).

**Definición 7.4:  $P_{MEOWA}(\alpha)$** 

Dado un nivel de *orness*  $\alpha$  se define el problema de programación matemática  $P_{MEOWA}(\alpha)$  como:

$$\text{maximizar } \text{dispersión}(w) = - \sum_{i=1}^{i=n} w_i \ln(w_i),$$

$$\text{s. a } \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{i=n} (n-i) w_i = \alpha,$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_i = 1,$$

$$0 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange es posible transformar este problema en una ecuación polinomial que debe resolverse para determinar los pesos óptimos.

A continuación se analiza brevemente el caso  $n \geq 3$  y  $\alpha = orness$  en el intervalo  $(0, 1)$ . Sea  $L$  la función lagrangiana del problema de optimización y sean  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  números reales. Formalmente:



$$L(W, \lambda_1, \lambda_2) = - \sum_{i=1}^n w_i \ln(w_i) + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n-1} w_i - \alpha \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right).$$

Entonces, las derivadas parciales de  $L$  son:

$$\frac{\partial L}{\partial w_j} = -\ln w_j - 1 + \lambda_1 + \frac{n-j}{n-1} \lambda_2 = 0 \quad \forall j,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n-1} w_i - \alpha = 0.$$

Después de trabajar con estas ecuaciones se llega a una expresión general que establece la relación entre los pesos para cualquier nivel de  $\alpha$ :

$$w_j = \sqrt[n-1]{w_1^{(n-j)} w_n^{(j-1)}} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Se trata por tanto de ecuaciones no-polinómicas que no pueden ser resueltas, en general, de manera trivial y que presentan además algunos problemas computacionales (O'Hagan, 1988; Filev y Yager, 1998; Fuller y Majlender, 2001, 2003). Como consecuencia, no hay una fórmula explícita para su resolución y debido a su complejidad hay numerosos autores (véase entre otros por ejemplo Fuller y Majlender, 2001) que usan una aproximación heurística para un cálculo simple.

De ahora en adelante se denotará al conjunto de todos los operadores de agregación OWA obtenidos por el procedimiento anterior como  $MEOWA$ :

### **Definición 7.5: Operador de agregación MEOWA**

Sea  $F$  un operador de agregación OWA ( $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}$ ), se dirá que

$F$  es un operador de agregación MEOWA ( $F \in MEOWA$ ) si y sólo si existe un  $\alpha$  para el cual el vector  $w$  es la solución al problema  $P_{MEOWA}(\alpha)$ .

### Observación 7.1

El caso de  $\alpha \in \{0,1\}$  puede ser fácilmente analizado ya que los dos problemas de optimización asociados a esos niveles de *orness* presentan solamente una única solución factible.

La solución óptima (y única) del problema  $P_{MEOWA}(1)$  es el vector  $w = (1, \dots, 0)$ , y la solución óptima (y única) del problema  $P_{MEOWA}(0)$  es el vector  $w = (0, \dots, 1)$ . Una consecuencia natural de lo anteriormente mencionado, los operadores de agregación Max y Min pertenecen a la clase *MEOWA*.

#### 7.2.3 Medidas de dispersión ordinales y nominales

Como se adelantaba en la introducción de esta sección (7.1) la idea que se propone es aplicar la nueva medida de dispersión  $\Phi_{||}$  en lugar de la entropía utilizada por O'Hagan (1988).

Por simplicidad, y dado que  $\Phi_{||}(f) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^k f_i f_j |j - i| = 2 \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^k f_i f_j (j - i)$ , en esta

aplicación se trabajará sin tomar en cuenta la constante, es decir, se utilizará

$$\Phi_{||}(f) = \sum_{\substack{j=1 \\ i < j}}^k f_i f_j (j - i).$$

En la Tabla 7.1 se presentan algunos vectores de pesos (5 componentes) con sus niveles de *orness* asociados variando desde 0.8 hasta 1. Después, se muestran las diferencias de dispersión cuando se utiliza la entropía acotada (ver Definición 3.9) vs. cuando se utiliza  $\Phi_{||}$ . Como ya se mencionó anteriormente, la entropía se usa para variables nominales y ésta es la razón por la que vectores de pesos que son muy diferentes (en relación a los operadores OWA que generan) tienen el mismo *orness* y la misma entropía pero diferentes valores de dispersión ordinal  $\Phi_{||}$ .

$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	<i>Orness</i>	Entropía*	$\Phi_{  }$
1	0	0	0	0	1	0	0
0.7	0.3	0	0	0	0.925	0.3796	0.21
0.6	0.4	0	0	0	0.9	0.4182	0.24
0.7	0.2	0.1	0	0	0.9	0.4982	0.3
0.9	0	0	0	0.1	0.9	0.202	0.36
0.5	0.5	0	0	0	0.875	0.4307	0.25
0.6	0.3	0.1	0	0	0.875	0.5579	0.33
0.7	0.1	0.2	0	0	0.875	0.4982	0.37
0.7	0.2	0	0.1	0	0.875	0.4982	0.39
0.8	0.1	0	0	0.1	0.875	0.3971	0.43
0.4	0.6	0	0	0	0.85	0.4182	0.24
0.6	0.2	0.2	0	0	0.85	0.5904	0.4
0.6	0.3	0	0.1	0	0.85	0.5579	0.42
0.7	0	0.3	0	0	0.85	0.3796	0.42
0.7	0.1	0.1	0.1	0	0.85	0.5843	0.46
0.7	0.2	0	0	0.1	0.85	0.4982	0.48
0.8	0	0.1	0	0.1	0.85	0.3971	0.5
0.3	0.7	0	0	0	0.825	0.3796	0.21
0.5	0.3	0.2	0	0	0.825	0.6398	0.41
0.6	0.1	0.3	0	0	0.825	0.5579	0.45
0.6	0.2	0.1	0.1	0	0.825	0.6766	0.49
0.6	0.3	0	0	0.1	0.825	0.5579	0.51
0.7	0	0.2	0.1	0	0.825	0.4982	0.51
0.7	0.1	0	0.2	0	0.825	0.4982	0.53
0.7	0.1	0.1	0	0.1	0.825	0.5843	0.55
0.8	0	0	0.1	0.1	0.825	0.3971	0.57
0.2	0.8	0	0	0	0.8	0.3109	0.16
0.5	0.2	0.3	0	0	0.8	0.6398	0.46
0.5	0.3	0.1	0.1	0	0.8	0.7259	0.5
0.5	0.4	0	0	0.1	0.8	0.5861	0.52
0.6	0	0.4	0	0	0.8	0.4182	0.48
0.6	0.1	0.2	0.1	0	0.8	0.6766	0.54
0.6	0.2	0	0.2	0	0.8	0.5904	0.56
0.6	0.2	0.1	0	0.1	0.8	0.6766	0.58
0.7	0	0.1	0.2	0	0.8	0.4982	0.58
0.7	0	0.2	0	0.1	0.8	0.4982	0.6
0.7	0.1	0	0.1	0.1	0.8	0.5843	0.62
0.8	0	0	0	0.2	0.8	0.3109	0.64

Tabla 7.1 - *Orness*, entropía acotada y dispersión ordinal  $\Phi_{||}$  para algunos vectores de pesos 5-dimensionales ordenados de acuerdo a su *orness* de forma decreciente desde 1 a 0.8

A continuación se muestran los gráficos de los valores anteriores con el *orness* variando en todo el rango 0 – 1:

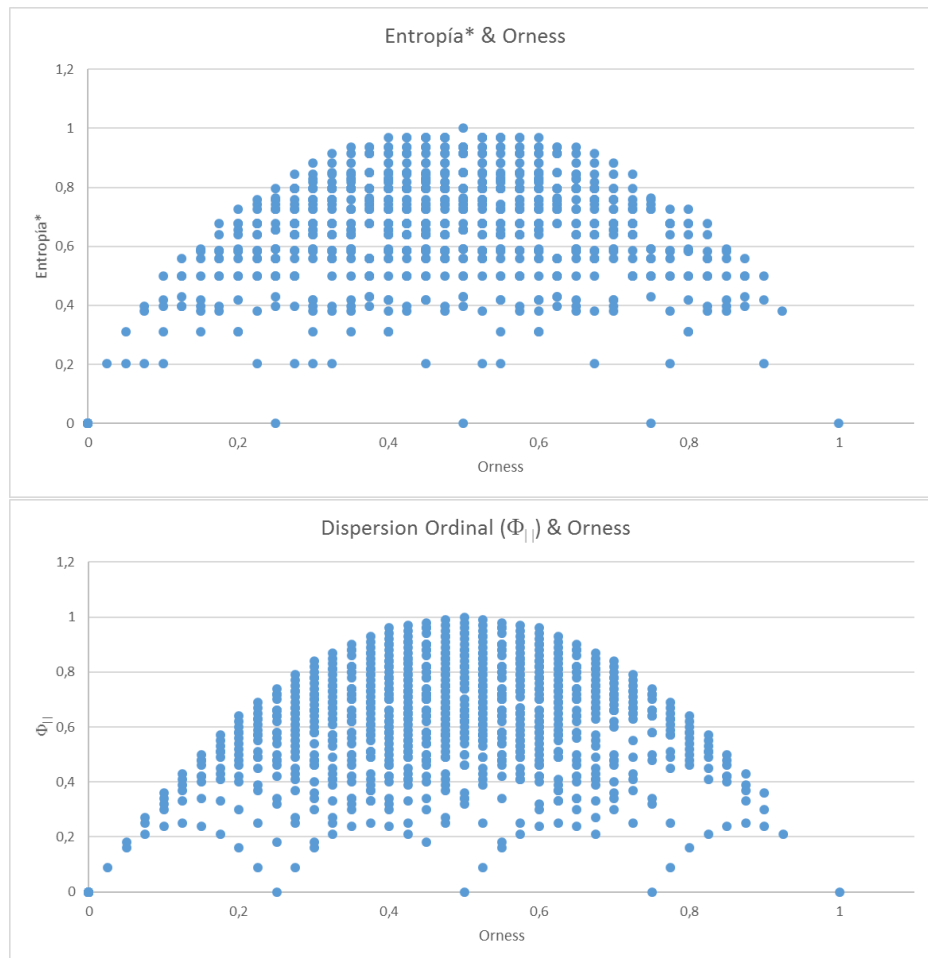


Figura 7.1 – Valores de la entropía acotada y la dispersión ordinal frente al *orness*

En la Tabla 7.1 y la Figura 7.1 pueden verse las grandes diferencias que se generan entre la dispersión ordinal  $\Phi_{II}$  y la entropía acotada. La Figura 7.1 muestra cómo el rango de valores de la medida de dispersión  $\Phi_{II}$  es mayor que el rango de valores producido por la entropía. La razón principal es que la entropía no es sensible a las permutaciones de orden y por tanto, dado un vector de pesos  $w$ , cualquier permutación de este vector de pesos  $w$  tendrá la misma entropía. La entropía es una medida de dispersión propia de variables nominales y por tanto no se altera ante cambios en el orden de los elementos. Obviamente,  $\Phi_{II}$  es sensible al orden y ésta es la razón por la que sus rangos son significativamente mayores.

Esta diferencia es especialmente relevante en algunas situaciones. Véanse, por ejemplo, los dos pesos 5-dimensionales  $w^3$  y  $w^4$  de la Tabla 7.2: estos vectores de pesos presentan el mismo nivel de *orness* y el mismo nivel de entropía pero son muy diferentes en cuanto al operador de agregación OWA que generan. El agregador OWA asociado al peso  $w^3 = (0.2, 0.2, 0, 0.6, 0)$  es completamente diferente del agregador OWA producido por el peso  $w^4 = (0, 0.2, 0.6, 0.2, 0)$ . En el primer caso la agregación está hecha considerando casos extremos, mientras que en el segundo se calcula considerando principalmente los casos intermedios. Es importante enfatizar que no es posible discriminar entre estas dos situaciones desde el punto de vista de la entropía o del *orness*. Por el contrario, la dispersión ordinal  $\Phi_{||}$  identifica perfectamente las diferencias entre ambas. En el primer caso, la dispersión ordinal es muy alta mientras que en el segundo es prácticamente la mitad.

	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	<i>Orness</i>	Entropía	Dispersión ordinal
$w^1$	<b>0.2</b>	0	<b>0.4</b>	<b>0.4</b>	0	0.5	1.054920168	<b>0.56</b>
$w^2$	<b>0.4</b>	0	<b>0.2</b>	0	<b>0.4</b>	0.5	1.054920168	<b>0.96</b>
$w^3$	<b>0.2</b>	<b>0.2</b>	0	<b>0.6</b>	0	0.5	0.950270539	<b>0.64</b>
$w^4$	0	<b>0.2</b>	<b>0.6</b>	<b>0.2</b>	0	0.5	0.950270539	<b>0.32</b>

Tabla 7.2 - Comparación entre la dispersión y entropía para un valor de *orness* dado

### **7.3 Una nueva forma para determinar pesos de los operadores OWA: operadores de agregación MOOWA**

Además de los problemas computacionales anteriormente mencionados, se observa que la idea del enfoque presentado por O'Hagan (1988) es maximizar la función entropía para un valor de *orness* dado. Esto quiere decir que la idea por tanto es distribuir los valores del vector de forma lo más uniformemente posible. Por ejemplo, si el valor del *orness* es 0.5, la solución que maximiza la entropía es única y asigna el mismo valor  $1/n$  a todos los pesos. Aunque esta solución podría ser razonable es muchos casos, existen algunas situaciones (especialmente cuando queremos evitar la compensación en los problemas multicriterio) en las que esta solución no es deseable.

La mayor diferencia entre utilizar la entropía y utilizar la dispersión ordinal es que la entropía alcanza su valor máximo cuando todos los pesos del vector  $w$  tienen el mismo valor, o si esto no es una solución factible, cuando están próximos a esta idea. Por otro lado, una solución ordinal alcanza su valor máximo en el caso del vector polar, es decir, cuando tenemos el valor máximo en las categorías extremas.

Por ejemplo, para un valor de *orness* de 0.5, el vector de peso óptimo será  $w = (0.5, 0, \dots, 0, 0.5)$ , que maximiza la dispersión ordinal. En este caso, la agregación se obtiene como el promedio entre el valor más bajo y el más alto.

A continuación se presenta el problema de programación matemática  $P_{MOOWA}(\alpha)$  correspondiente:

**Definición 7.6:  $P_{MOOWA}(\alpha)$**

Dado un nivel de *orness*  $\alpha$  se define el problema de programación matemática  $P_{MOOWA}(\alpha)$  como:

$$\begin{aligned} \max \Phi_{||}(w) &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{j=i}^{j=n} w_i w_j (j - i), \\ \text{s. a} \quad &\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{i=n} (n - i) w_i = \alpha, \\ &\sum_{i=1}^{i=n} w_i = 1 \quad 0 \leq w_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Tal y como se hizo con la entropía, de ahora en adelante denotaremos el conjunto de todos los operadores OWA obtenidos por el nuevo procedimiento propuesto anteriormente como  $MOOWA$  (Operadores OWA de máxima dispersión ordinal en lugar de operadores OWA de máxima entropía).

### Definición 7.7: Operador de agregación MOOWA

Sea  $F$  un operador de agregación OWA ( $F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}$ ), se dirá que  $F$  es un operador de agregación MOOWA ( $F \in \text{MOOWA}$ ) si y sólo si existe un  $\alpha$  para el cual el vector  $w$  es la solución al problema  $P_{\text{MOOWA}}(\alpha)$ .

### Observación 7.2

El caso de  $\alpha \in \{0, 1\}$  puede ser fácilmente analizado ya que los dos problemas de optimización asociados a esos niveles de *orness* presentan solamente una única solución factible.

La solución óptima (y única) del problema  $P_{\text{MOOWA}}(1)$  es el vector  $w = (1, \dots, 0)$  y la solución óptima (y única) del problema  $P_{\text{MOOWA}}(0)$  es el vector  $w = (0, \dots, 1)$ . Una consecuencia natural de lo anteriormente mencionado es que los operadores de agregación Max y Min pertenecen a la clase  $\text{MOOWA}$ .

A continuación se analiza el caso general para  $\alpha \in (0, 1)$ . Para ello se verá primeramente un ejemplo:

#### Ejemplo 7.1:

Sea el vector de pesos  $w = (0.25, 0, 0.25, 0, 0.5)$ . Su *orness* viene dado por  $\alpha = \frac{1}{4}(4 \cdot 0.25 + 2 \cdot 0.25) = 0.375$ . Y la dispersión es:

$$\Phi_{||}(w) = 2 \cdot 0.25^2 + 4 \cdot 0.25 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.25 \cdot 0.5 = 0.875.$$

Hay que notar que si se toma el peso  $w_3$  y se distribuye por igual entre  $w_1$  y  $w_5$  (proceso similar a la mitosis presentada en 3.5) se incrementa la dispersión manteniendo el mismo nivel de *orness*. Si añadimos 0.125 a  $w_1$  y  $w_5$ , se tiene el nuevo vector pesos  $w' = (0.375, 0, 0, 0, 0.625)$ , que sigue siendo un vector de pesos válido para un operador OWA ya que la suma de sus pesos es 1 y tiene el mismo *orness*, pero mayor dispersión.

Generalizando lo anterior, sea  $w = (w_1, \dots, w_n)$  el vector de pesos de un operador OWA (es decir,  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ) con un nivel de *orness* dado  $\alpha =$

$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) w_i$ , y sea  $e_i$  el  $i$ -ésimo vector de la base ortonormal del espacio  $\mathbb{R}^n$  (es decir,  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  cuya única componente no nula la tiene en la posición  $i$ -ésima). Si  $\exists a: 1 < a < n$  con  $w_a \neq 0$ , se puede definir el vector  $w' = w - w_a \cdot e_a + \frac{n-a}{n-1} \cdot w_a \cdot e_1 + \frac{a-1}{n-1} \cdot w_a \cdot e_n$ , y es fácil comprobar que  $\sum_{i=1}^n w'_i = 1$ . El *orness* para  $w'$  sigue siendo  $\alpha$  pero  $\Phi_{||}(w') > \Phi_{||}(w)$ . Resumiendo, el vector de pesos con la mayor dispersión para un nivel determinado de *orness*  $\alpha$  será aquel cuyos únicos pesos no nulos sean el primero y el último y, como  $\alpha = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (n-i) w_i$ , se tiene que  $w_1 = \alpha$  y  $w_n = 1-\alpha$ .

Es posible obtener el mismo resultado utilizando los multiplicadores de Lagrange, como se mostrará de manera resumida en la demostración del siguiente teorema:

### Teorema 7.1

Fijado un valor  $\alpha$  en el problema de programación matemática  $P_{MOOWA}(\alpha)$  (Definición 7.6), es posible probar que el vector peso  $w = (\alpha, 0, \dots, 0, 1-\alpha)$  es el vector de pesos óptimo que maximiza la dispersión ordinal (se denotará como el vector MOOWA).

*Demostración:* Se analiza el caso  $n \geq 3$  y *orness*  $\alpha \in (0, 1)$ . Sea  $L$  la función lagrangiana del problema de optimización con restricciones, donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  números reales. Formalmente:

$$L(W, \lambda_1, \lambda_2) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \sum_{j=1}^{i=n} w_i w_j (j-i) + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n-1} w_i - \alpha \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right).$$

Entonces, las derivadas parciales de  $L$  son:

$$\frac{\partial L}{\partial w_k} = \sum_{i=1}^n w_i |i-k| + \lambda_1 \frac{n-k}{n-1} + \lambda_2 = 0 \quad \forall k,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \sum_{i=1}^n w_i - 1 = 0,$$



$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{i=1}^n \frac{n-i}{n-1} w_i - \alpha = 0.$$

No es difícil ver que las ecuaciones anteriores forman un sistema lineal con  $n+2$  ecuaciones y  $n+2$  variables. Al calcular el rango de la matriz asociada se concluye que se trata de un sistema compatible (ya que las  $n+2$  ecuaciones son linealmente independientes) con solución única. Tras esto, es fácil comprobar que  $w = (\alpha, 0, \dots, 0, 1-\alpha)$  es una solución del sistema lineal.  $\square$

Para concluir este apartado, se presenta a continuación un ejemplo en el que las funciones de agregación MOOWA son utilizadas para resolver un pequeño problema de toma de decisión multicriterio:

#### Ejemplo 7.2:

Supóngase unos padres que quieren comprar una motocicleta a su hijo por su cumpleaños. La seguridad es un criterio principal, pero también lo es el que tenga un precio asequible. Las preferencias del hijo a la hora de elegir el modelo de moto también han de ser tenidas en cuenta ya que la mejor moto en términos de seguridad y precio puede no ser un regalo válido si es un modelo que el hijo detesta. Los padres han seleccionado 10 motos diferentes y las han evaluado de 0 a 1 en cada uno de los criterios anteriores obteniéndose las siguientes puntuaciones:

Motocicleta	Seguridad	Precio	Preferencias hijo
<b>P1</b>	0	1	1
<b>P2</b>	0.8	0.2	0
<b>P3</b>	0.4	0.6	0
<b>P4</b>	0.6	0.2	0.2
<b>P5</b>	0.5	0	0.5
<b>P6</b>	0.5	0.5	0.5
<b>P7</b>	0.1	1	0.5
<b>P8</b>	1	0.2	0
<b>P9</b>	0.4	1	0.3
<b>P10</b>	0.7	0.2	0.3

Tabla 7.3 - Evaluación en  $[0,1]$  de las 10 motocicletas para cada uno de los 3 criterios

Para poder elegir la mejor motocicleta, se quieren ordenar los modelos y se decide utilizar un operador de agregación OWA. Primero, se debe ordenar la información de manera que el valor del criterio mejor cumplido de cada moto sea el primero, a continuación el segundo criterio mejor cumplido y por último el peor, lo que genera la siguiente tabla:

<b>Motocicleta</b>	<b>Mejor</b>	<b>Medio</b>	<b>Peor</b>
<b><i>P1</i></b>	1	1	0
<b><i>P2</i></b>	0.8	0.2	0
<b><i>P3</i></b>	0.6	0.4	0
<b><i>P4</i></b>	0.6	0.2	0.2
<b><i>P5</i></b>	0.5	0.5	0
<b><i>P6</i></b>	0.5	0.5	0.5
<b><i>P7</i></b>	1	0.5	0.1
<b><i>P8</i></b>	1	0.2	0
<b><i>P9</i></b>	1	0.4	0.3
<b><i>P10</i></b>	0.7	0.3	0.2

Tabla 7.4 - Evaluación ordenada en  $[0,1]$  de las 10 motocicletas basada en el mejor, medio y peor criterio

La cuestión ahora es cómo agrupar estos criterios para poder obtener un único valor por modelo que permita establecer un orden entre ellos. Inicialmente la media podría ser un buen agregador OWA pero posicionaría como primera opción a *P1*, que tiene un 0 en Seguridad por lo que *P1* no es una buena elección. Si ser muy débil en uno de los criterios no es aceptable, se podría usar el operador min OWA y los modelos serían ordenados de acuerdo al criterio peor cumplido. En este caso *P6*, con una puntuación media en todos los criterios, sería el modelo seleccionado. Pero esta motocicleta no sobresale en ninguno de los criterios. Si se quiere una moto que sobresalga en alguno de los criterios, entonces el operador max OWA sería el correcto, pero pondría los modelos *P1*, *P7*, *P8* y *P9* en la misma primera posición.

Ranking	Min $w = (0,0,1)$	OWA	Average $w = (1/3, 1/3, 1/3)$	OWA	Max $w = (1, 0, 0)$	OWA
1	<b>P6</b>	0.5	<b>P1</b>	0.67	<b>P1, P7, P8, P9</b>	1
2	<b>P9</b>	0.3	<b>P9</b>	0.57	<b>P2</b>	0.8
3	<b>P4</b>	0.2	<b>P7</b>	0.53	<b>P10</b>	0.7
4	<b>P10</b>	0.2	<b>P6</b>	0.50	<b>P4</b>	0.6
5	<b>P7</b>	0.1	<b>P8, P10</b>	0.40	<b>P3</b>	0.6
6	<b>P1, P2, P3, P5, P8</b>	0	<b>P2, P3, P4, P5</b>	0.33	<b>P6</b>	0.5
7					<b>P5</b>	0.5

Tabla 7.5 - Motocicletas ordenadas según diferentes operadores OWA

La media se ve afectada por compensaciones, el mínimo no da valor a aquellos modelos que tienen una evaluación alta en algún criterio, y el máximo no discrimina bien, además de no penalizar a aquellos que tienen evaluaciones bajas en alguno de los criterios. Así que la pregunta sigue siendo qué operador OWA elegir, es decir, cómo definir el vector  $w$  del operador OWA. Las siguientes tablas (Tabla 7.6 y Tabla 7.7) muestran los valores de agregación final y el orden correspondiente para escenarios con diferentes valores de *orness* ( $\alpha$ ) utilizando los pesos MEOWA y MOOWA:

	MEOWA							MOOWA			
	c1	c2	c3	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$
<i>P1</i>	1	1	0	0.45	0.56	0.66	0.76	0.30	0.40	0.50	0.60
<i>P2</i>	0.8	0.2	0	0.18	0.26	0.33	0.42	0.24	0.32	0.40	0.48
<i>P3</i>	0.6	0.4	0	0.21	0.27	0.33	0.39	0.18	0.24	0.30	0.36
<i>P4</i>	0.6	0.2	0.2	0.26	0.30	0.33	0.38	0.32	0.36	0.40	0.44
<i>P5</i>	0.5	0.5	0	0.22	0.28	0.33	0.38	0.15	0.20	0.25	0.30
<i>P6</i>	0.5	0.5	0.5	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
<i>P7</i>	1	0.5	0.1	0.36	0.44	0.53	0.62	0.37	0.46	0.55	0.64
<i>P8</i>	1	0.2	0	0.21	0.30	0.40	0.50	0.30	0.40	0.50	0.60
<i>P9</i>	1	0.4	0.3	0.44	0.50	0.56	0.64	0.51	0.58	0.65	0.72
<i>P10</i>	0.7	0.3	0.2	0.31	0.35	0.40	0.45	0.35	0.40	0.45	0.50

Tabla 7.6 - Valoración de motocicletas con MEOWA y MOOWA según niveles de exigencia ( $\alpha$ )

	MEOWA							MOOWA			
	c1	c2	c3	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.4$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$
<i>P1</i>	1	1	0	2	1	1	1	6-7	4	3-4-5	3-4
<i>P2</i>	0.8	0.2	0	10	10	8-10	7	8	8	7-8	7
<i>P3</i>	0.6	0.4	0	8-9	9	8-10	8	9	9	9	9
<i>P4</i>	0.6	0.2	0.2	6	6-7	8-10	9-10	5	7	7-8	8
<i>P5</i>	0.5	0.5	0	7	8	8-10	9-10	10	10	10	10
<i>P6</i>	0.5	0.5	0.5	1	2-3	4	4-5	2	2	3-4-5	5-6
<i>P7</i>	1	0.5	0.1	4	4	3	3	3	3	2	2
<i>P8</i>	1	0.2	0	8-9	6-7	6-7	4-5	6-7	5-6	3-4-5	3-4
<i>P9</i>	1	0.4	0.3	3	2-3	2	2	1	1	1	1
<i>P10</i>	0.7	0.3	0.2	5	5	6-7	6	4	5-6	6	5-6

Tabla 7.7 - Orden de motocicletas con MEOWA y MOOWA según niveles de exigencia ( $\alpha$ )

Nótese que independientemente del nivel de exigencia (*orness*:  $\alpha = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$ ), las motocicletas que ocupan las primeras posiciones son similares para los dos agregadores. Es más, se ve de forma constante que a medida que se relaja el nivel de demanda, las puntuaciones son iguales o más altas. Obsérvese el primer modelo, que es muy bueno en los criterios primero y segundo es el que presenta el peor resultado en el tercero: si todos los criterios son importantes y tomando el escenario más demandante con  $\alpha = 0.3$ , no parece razonable tener a *P1* en la segunda posición de la ordenación teniendo en cuenta que hay otros modelos que tienen una mejor evaluación en el tercer criterio y una evaluación media en el segundo. MEOWA asigna esta buena posición en la ordenación a *P1* por su alto valor en los primeros dos criterios, viéndose afectado por el clásico problema de compensación.

Esto no ocurre con los operadores MOOWA ya que estos penalizan el bajo valor del tercer criterio, posicionando a *P1* en sexto lugar y ascendiendo aquellos modelos que superan el valor mínimo en este criterio a una mejor posición (*P9*, *P7*, *P10* y *P4*). Por tanto, como todos los criterios son importantes parece menos preciso poner un modelo (*P1*) que tiene valor cero en uno de los criterios (a pesar de tener otro criterio con valor máximo) que a otro como *P9* que tiene valor medio en los criterios *C2* y *C3*. Si se observa la ordenación de las motocicletas en los escenarios con diferentes niveles de

demanda, puede apreciarse que los operadores MEOWA posicionan  $P1$  en primera posición para casi todos los posibles escenarios dados sus altos valores en algunos criterios, viéndose afectado por la compensación. Mientras que los operadores MOOWA, que penalizan los valores bajos, colocan  $P9$  en la primera posición independientemente del nivel de demanda, ya que corresponde al modelo que mejor cumplimenta todos los criterios en conjunto.

#### **7.4 Algunas propiedades de los operadores de agregación MOOWA**

La primera propiedad que puede ser fácilmente demostrada es que el conjunto de todos los operadores OWA con pesos MOOWA (es decir, el conjunto  $MOOWA$ ) pueden ser caracterizados según su nivel de *orness* y los operadores de agregación máximo y mínimo.

##### **Proposición 7.1**

El conjunto  $MOOWA$  puede ser reescrito como:

$$\{\alpha \text{ MAX} + (1-\alpha) \text{ MIN} \mid \alpha \in [0,1]\},$$

donde las funciones MAX y MIN son los operadores clásicos de agregación definidos de  $[0,1]^n$  en  $[0,1]$ .

*Demostración:*

$\Rightarrow$  Sea  $A \in MOOWA$  una función de agregación MOOWA, entonces existe

$\alpha \in [0,1]$  tal que los pesos de la función de agregación  $A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n w_i x_{(i)}$

son la solución óptima del problema  $P_{MOOWA}(\alpha)$  y por tanto su correspondiente vector de pesos  $w = (\alpha, 0, \dots, 0, 1-\alpha)$ . Así, la función de agregación puede ser reescrita como  $A(x_1, \dots, x_n) = \alpha \text{ Max}(x_1, \dots, x_n) + (1-\alpha) \text{ Min}(x_1, \dots, x_n)$ .

$\Leftarrow$  Sea  $A$  una función definida de  $[0,1]^n$  en  $[0,1]$ , entonces, como  $A(x_1, \dots, x_n) = \alpha \text{Max}(x_1, \dots, x_n) + (1-\alpha) \text{Min}(x_1, \dots, x_n)$ , es muy fácil comprobar que el vector de pesos  $w = (\alpha, 0, \dots, 0, 1-\alpha)$  es la solución óptima del problema  $P_{MOOWA}(\alpha)$  y por tanto  $A \in MOOWA$ .  $\square$

Otra diferencia importante entre la familia de los MOOWA y la de los MEOWA es la convexidad de las dos familias. En la siguiente proposición se puede ver que la combinación lineal de dos agrupaciones MOOWA es otra agregación MOOWA.

### Proposición 7.2

Sean  $A_1, A_2$  dos operadores MOOWA con niveles de *orness*  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  respectivamente, entonces para cualquier  $\lambda \in [0,1]$  la función  $A = \lambda A_1 + (1-\lambda)A_2$  es un operador de agregación MOOWA con nivel de *orness*  $\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$ .

*Demostración:* Es fácil ver que para cualquier  $x = (x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ , la función de agregación  $A(x_1, \dots, x_n) = \lambda A_1(x_1, \dots, x_n) + (1-\lambda)A_2(x_1, \dots, x_n)$  puede ser reescrita como:

$$A(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_1\lambda + \alpha_2(1-\lambda))\text{Max}(x_1, \dots, x_n) + ((1-\alpha_1)\lambda + (1-\alpha_2)(1-\lambda))\text{Min}(x_1, \dots, x_n),$$

lo que prueba el resultado.  $\square$

Como consecuencia del anterior resultado se tiene el siguiente corolario:

### Corolario 7.1

La clase MOOWA es convexa.

*Demostración:* Directa de la proposición anterior.  $\square$

### Observación 7.3

Nótese que la familia de operadores de agregación MEOWA (Fuller y Majlender, 2001) no satisface esta importante propiedad y por tanto el conjunto de los operadores de agregación MEOWA no es convexo.

El Corolario 7.1 puede ser extendido de la siguiente manera:

### Proposición 7.3

Sea  $B: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  una función de agregación y sean también  $A_1, \dots, A_k$   $k$  familias de funciones de agregación MOOWA. Entonces, la función de agregación  $C: \cup [0,1]^n \rightarrow [0,1]$  construida como  $C(x_1, \dots, x_n) = B(A_1(x_1, \dots, x_n), \dots, A_k(x_1, \dots, x_n))$  pertenece a la clase MOOWA.

*Demostración:* Inmediata. □

Para concluir este apartado, se verá que el orden natural inducido por la propiedad de monotonía es un orden lineal sobre el conjunto MOOWA:

### Proposición 7.4

Sean  $A_1$  y  $A_2$  dos elementos de MOOWA con nivel de *orness*  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Entonces se verifica que:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Leftrightarrow A_1(x) \leq A_2(x) \quad \forall x \in [0,1]^n.$$

*Demostración:* Sea  $x$  un elemento de  $[0,1]^n$ , se denota por  $a = \min(x) \leq b = \max(x)$ . Entonces se verifica la siguiente ecuación:  $A_1(x) \leq A_2(x) \Leftrightarrow a^{\alpha_1} + b(1-\alpha_1) \leq a^{\alpha_2} + b(1-\alpha_2)$ . Lo que es equivalente a decir que  $(\alpha_2 - \alpha_1)(b - a) \geq 0$ . Y esta última desigualdad se verifica si y sólo si  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  y por tanto se verifica la proposición. □

Como consecuencia de la última proposición, el orden natural definido por la propiedad de monotonía entre los operadores de agregación induce un orden lineal en el conjunto MOOWA.

### Corolario 7.2

El conjunto MOOWA es un orden lineal con el orden  $\leq_{\text{MOOWA}}$  definido para  $A_1$  y  $A_2$  de MOOWA como  $A_1 \leq_{\text{MOOWA}} A_2$  si y sólo si  $A_1(x) \leq A_2(x)$  para todo  $x \in [0,1]^n$ .

*Demostración:* Inmediata. □

Nótese que este retículo es completo ya que existe un elemento máximo (el operador de agregación Máximo) y un elemento mínimo (el operador de agregación Mínimo).

Para finalizar esta sección de propiedades se analiza el concepto de compensación (o trade-off) de los MOOWA y se compara con los MEOWA. La compensación no es siempre algo deseable cuando se está trabajando en problemas de agregación o en de decisión multicriterio. Jiang y Eastman (2000) introdujeron una definición de la medida de compensación para operadores de agregación OWA que representa la manera en la que una puntuación baja puede ser compensada por puntuaciones altas:

**Definición 7.8: “Trade-off” (Compensación) (Jian y Eastman, 2000)**

Dado un operador OWA con un vector de pesos  $w$ , se define la medida de compensación asociada como:

$$TO(w) = 1 - \left( \frac{\sum_{i=1}^n \left( w_i - \frac{1}{n} \right)^2}{n - 1} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

**Observación 7.4**

No es difícil ver que la medida de compensación  $TO$  alcanza su máximo en el caso del promedio y el mínimo cuando existe un  $w_i = 1$  para algún  $i$ . También conviene hacer notar que se puede probar que los operadores de agregación MEOWA muestran siempre mayor compensación que los MOOWA, como se observa en la figura a continuación. En ella, variando el *orness* de 0 a 1, para cada nivel de *orness* se han generado vectores MEOWA y MOOWA, obteniendo una muestra de 1.150 casos. A continuación para cada uno de ellos se ha calculado la compensación del vector MEOWA y del vector MOOWA asociados pudiendo observarse que la compensación MEOWA siempre es superior a la MOOWA:



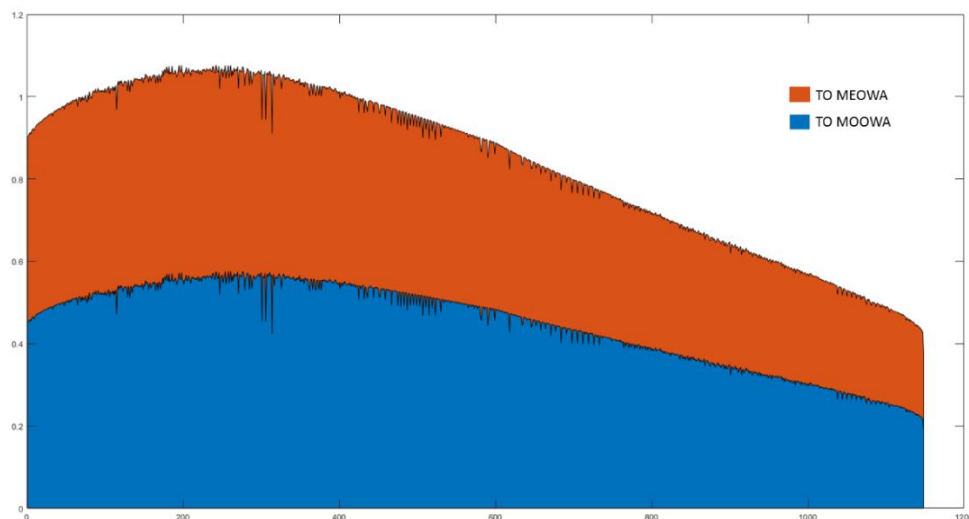


Figura 7.2 – Valores del trade-off para los pesos asociados a 1.150 vectores óptimos (MEOWA y MOOWA) para niveles de *orness* entre (0.1, 0.9)

## 7.5 Conclusiones

En este capítulo proponemos una manera alternativa para determinar los pesos de un operador OWA basándose en medidas de dispersión ordinal para un nivel de *orness* dado. Estos pesos se han denominado los pesos MOOWA.

Los pesos de los operadores de agregación OWA pueden ser vistos como una medida ordinal en la cual el orden es relevante. La entropía, como medida clásica de dispersión, no tiene en cuenta el orden del vector y por tanto un vector como  $w = (0.5, 0.5, 0, 0, 0)$  (que agrega la información teniendo en cuenta los dos valores más altos), tiene la misma dispersión que el vector  $w' = (0.5, 0, 0, 0, 0.5)$  (que es una combinación lineal del valor más alto y el más bajo). Como se ha mencionado anteriormente, hay algunas situaciones en las que los pesos MEOWA producen compensaciones no deseadas (trade off) entre los criterios debido al hecho de que al maximizar la entropía se está maximizando el reparto de forma equitativa entre todas las componentes del vector de pesos. Como se ve en la Figura 7.2, los MOOWA son una propuesta que reduce este problema de la compensación entre criterios a la hora de agregarlos.

Aunque es claro que los operadores clásicos MEOWA son muy útiles en algunas situaciones para agregar información, presentan dos inconvenientes importantes en algunos casos reales. El primero es la complejidad de los cálculos y el segundo es el uso de la entropía. En este capítulo hemos utilizado una medida de dispersión propuesta en el capítulo 4 de esta memoria ( $\Phi_{||}$ ) para evitar estos dos importantes problemas y se ha incluido un ejemplo práctico que pone de manifiesto las diferencias entre ambos enfoques.



## **8 Conclusiones y futuras líneas de investigación**

### **8.1 Conclusiones**

La variabilidad de un conjunto de datos es un concepto amplio al que se asocian diferentes nombres dependiendo de la disciplina y contexto del problema. Encontramos la denominación de “dispersión” como una de las maneras más generales de referirse a ella. Es un concepto fundamental en Estadística, existiendo numerosas técnicas que lo utilizan de forma muy relevante.

Las medidas para analizar la variabilidad de los datos dependen de la naturaleza de los mismos. En contextos con variables numéricas, las medidas de variabilidad o dispersión son claras y están comúnmente aceptadas (varianza, desviación típica, coeficiente de variación). En variables cualitativas nominales es habitual utilizar la entropía como medida de dispersión además de medidas clásicas como la razón de variación o el índice de variación cualitativa.

En variables cualitativas ordinales, en cambio, no existe una medida común que haya sido claramente aceptada. Demasiado a menudo, la técnica utilizada es convertir la variable ordinal en una variable numérica (suponiendo una escala continua subyacente no existente) o en una variable nominal (ignorando la ordinalidad de los datos), y aplicar entonces las medidas de dispersión conocidas y propias de estos tipos de variables. Este procedimiento no es matemáticamente correcto y puede llevar a una interpretación errónea de los resultados.

En esta memoria se ha llevado a cabo un análisis riguroso y una formalización matemática de las medidas de dispersión ordinal encontradas hasta la fecha.

Se han clasificado estas medidas de dispersión a partir de una serie de propiedades (algunas existentes, reformuladas con mayor rigurosidad, y otras planteadas de forma novedosa) para entender mejor su

comportamiento; definiendo además una relación de equivalencia entre las mismas cuando ordenan cualesquiera dos conjuntos de datos de la misma manera.

De este profundo análisis se han encontrado dos enfoques conceptuales para la dispersión: el que la mide como la discrepancia media entre dos observaciones cualesquiera elegidas al azar y el que la enfoca como el opuesto a la concentración en torno a un punto de referencia (idea similar a la desviación media en datos cuantitativos).

Ambos enfoques pueden ser formulados analíticamente de forma muy similar, a saber, como una expresión que combina las frecuencias de las categorías ponderando la diferencia entre ellas (bien entre categorías dos a dos en el caso de la discrepancia media, bien entre cada categoría y la categoría de referencia). Se presentan ambas generalizaciones.

Es fundamental tener en cuenta que, dado que la escala ordinal carece de la propiedad de distancia entre sus categorías, no pueden realizarse operaciones aritméticas con las categorías o equivalentemente con los órdenes de las categorías. Hay dos implicaciones fundamentales de esto sobre las generalizaciones propuestas. Por una parte, el valor de referencia en el segundo enfoque conceptual presentado tiene que ser una categoría de la escala, lo que lleva a pensar en la moda (descartada por su falta de unicidad y robustez) o la mediana, que ha sido redefinida en la "mediana única" para evitar el caso en que operaciones entre categorías fueran necesarias garantizando además su unicidad y siendo así la medida de referencia propuesta en esta memoria. La segunda implicación muy importante del hecho de que no exista la distancia en la escala de datos es que la discrepancia entre las categorías tiene que venir dada por una matriz que defina los saltos entre cualesquiera dos categorías. En este trabajo, interpretamos esta matriz, analizamos las hipótesis que debe cumplir, tales como capturar las posibles clases subyacentes en una escala ordinal, y proponemos un cálculo semi-automático de la matriz en función del vector de pesos  $\alpha$ .

Con esta propuesta, trabajamos con las dos generalizaciones y analizamos las propiedades de las medidas de dispersión introducidas anteriormente. Encontramos que ambas medidas satisfacen algunas propiedades como ser medidas cuantitativas y no negativas, invariantes de la escala, susceptibles de ser indexadas y que alcanzan su dispersión máxima en el vector polar. No satisfacen de manera general algunas nuevas propiedades presentadas como la mitosis o la invarianza frente a traslaciones o frente a distribuciones complementarias, algo que era de esperar ya que se pretende precisamente recoger la posible no equidistancia conceptual entre las clases de una escala ordinal. Existe una propiedad que no verifican de manera general: se trata de la independencia a valores extremos en situaciones de simetría. No obstante, hay que tener en cuenta que en escalas de Likert tradicionales, muy habituales en la investigación social, la medida propuesta con referencia la mediana única (similar a la desviación media en variables continuas) sí satisface esta independencia, lo que podría considerarse no muy adecuado en este caso.

En relación a las aplicaciones presentadas encontramos que en el caso del análisis del impacto de la naturaleza de las etiquetas en una escala de Likert, el análisis entre la relación entre el consenso (como opuesto a la dispersión) y el impacto del cambio de etiqueta es muy interesante y diferente al trabajar con medidas de dispersión ordinales vs. medidas de dispersión nominal como la entropía. Además, al analizar la traslación de respuestas de una metodología a otra, se encuentra que aunque la entropía recoge un comportamiento significativamente distinto en las categorías extremas, no es capaz de detectar la asimetría lateral observada en análisis descriptivos previos, algo que las medidas de dispersión ordinal propuestas  $\Phi_{||}$  y  $\Phi_{w0}$  sí capturan. Esta asimetría permite concluir que la percepción de la etiqueta "Muy de acuerdo" se corresponde con un rango de etiquetas frecuentistas mayor que cualquier otra etiqueta de la escala lingüística. Una última conclusión de esta primera aplicación es que detectamos una tendencia a expresar mayor acuerdo con etiquetas lingüísticas que con etiquetas frecuentistas.

La aplicación de la nueva generalización de medidas de dispersión en el contexto de operadores de agregación nos lleva a proponer una nueva familia paramétrica de operadores OWA: los MOOWA (Maximum Ordinal dispersion OWA operators). Es generada maximizando la dispersión ordinal de los vectores asociados a los operadores OWA, en lugar de maximizar la dispersión nominal mediante el uso de la entropía (operadores MEOWA: ver Yager, 1988; O'Hagan 1988; Fuller y Majlender, 2003). Comparados con los MEOWA, los MOOWA presentan unos cálculos mucho más sencillos y e intuitivos en la interpretación ya que se trata de una combinación lineal convexa del mejor y el peor criterio cumplidos.

## **8.2 Contribuciones relacionadas con este trabajo**

En esta sección se presentan las contribuciones realizadas producto del desarrollo de esta memoria. Concretamente, en la subsección 8.2.1 se listan los artículos publicados en revistas. A continuación, en la subsección 8.2.2, se muestran otras publicaciones. Y finalmente en 8.2.3 se presentan las contribuciones realizadas en congresos.

### 8.2.1 Artículos en revistas

Flores-Vidal, P. A., Martínez, N., & Gómez, D. (2018). Post-processing in edge detection based on segments. *World Scientific Series on Computer Engineering and Information Science 11*, pp. 1425 - 1432.

Martínez, N., Gómez, D., Olaso, P., Rojas, K., & Montero, J. (2019). A novel ordered weighted averaging weight determination based on ordinal dispersion. *International Journal of Intelligent Systems 34*(9), pp. 2291-2315.

Martínez, N., Gómez, D., Rojas, K., Olaso, P., & Montero, J. (In press). Social indexes segregation based on MEOWA and MOOWA aggregation operators. *Studies in Computational Intelligence*. In press.

### 8.2.2 Otras publicaciones

Martínez N., Gómez D., & Montero J. (2012). Impacto de las etiquetas en la interpretación de la escala de Likert. In *ESTYLF, XVI Congreso Español sobre tecnologías y lógica fuzzy* (pp. 253–258). Universidad de Valladolid, Valladolid.

### 8.2.3 Contribuciones a congresos

Martínez N., Gómez D., & Montero J. (2012). "Impacto de las etiquetas en la interpretación de la escala de Likert". *ESTYLF, XVI Congreso español sobre tecnologías y lógica fuzzy*. Valladolid (España).

Martínez N., Gómez D., & Montero J. (2017). "Medidas de similitud en contextos lingüísticos". *Jornada FuzzyMAD-17*. Madrid (España).

Flores-Vidal, P. A., Martínez, N., & Gómez, D. (2018). "Post-processing in edge detection based on segments". *13<sup>th</sup> International FLINS Conference*. Belfast (Irlanda).

Martínez N., Gómez D., & Montero J. (2018). "Nuevo cálculo de los pesos OWA mediante medidas de dispersión ordinal". *Jornada FuzzyMAD-18*. Madrid (España).

Martínez, N., Gómez, D., Olaso, P., Montero, J., & Rojas, K. (2018). "A novel OWA weights determination based on ordinal dispersion". *13<sup>th</sup> International FLINS Conference*. Belfast (Irlanda).

Martínez, N., Gómez, D., Rojas, K., Olaso, P., & Montero, J. (2019). "Social indexes segregation based on MEOWA and MOOWA aggregation operators". *ESCIM 11<sup>th</sup> European Symposium on Computational Intelligence and Mathematics*. Toledo (España).



### **8.3 Futuras líneas de investigación**

El análisis de las medidas de dispersión ordinales existentes, sus propiedades y la generalización propuesta para los dos enfoques conceptuales han abierto algunas cuestiones sobre las que sería interesante seguir trabajando:

- Análisis de la inercia como medida de dispersión.
- Estudio de la relación entre la dispersión máxima ordinal y nominal bien mediante un enfoque similar al de Blair y Lacy (ver 2.5) estudiando la relación entre la dispersión máxima ordinal dada por el punto  $C = (1/2, \dots, 1/2)$  y la dispersión máxima nominal que vendría dada por el punto  $D \in \mathbb{R}^{k-1}$ ,  $D = (1/k, 2/k, \dots, (k-1)/k)$  (ver también conclusiones al objetivo específico 2 en la sección 6.6).
- Como se ha visto en la aplicación del capítulo 6 (subsección 6.5.3), no es posible expresar la discrepancia entre diferentes etiquetas a partir de medidas de dispersión ordinal, siendo la entropía un regresor más eficiente en el modelo planteado. La Tabla 8.1 a continuación muestra algunos ejemplos ficticios extremos que pasan de una distribución con un consenso máximo (y por tanto con una discrepancia intuitivamente baja) hasta una distribución uniforme en las categorías (para la que intuitivamente la discrepancia será alta) pasando entre esos ejemplos (intuitivamente crecientes en discrepancia) por la distribución polar máxima:

Ejemplos	1	2	3	4	5	Entropía	$\Phi_{  }$	$\Phi_{W0}$	$\Phi_{  ,}$ Med_u	$\Phi_{W0,}$ Med_u
C <i>Consenso máx.</i>	0%	0%	0%	0%	100%	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
P3	10%	0%	0%	0%	90%	0.5	0.7	1.4	0.4	0.8
P2	30%	0%	0%	0%	70%	0.9	1.7	3.4	1.2	2.4
P1 <i>Polar máxima</i>	50%	0%	0%	0%	50%	1.0	2.0	4.0	2.0	4.0
U3	35%	10%	10%	10%	35%	2.1	1.9	3.5	1.6	2.4
U2	25%	17%	16%	17%	25%	2.3	1.7	3.1	1.3	2.0
U1 <i>Uniforme</i>	20%	20%	20%	20%	20%	2.3	1.6	2.8	1.2	1.8

Tabla 8.1 - Ejemplos ficticios de evolución del consenso y medidas de dispersión asociadas

Puede observarse que la evolución de la Entropía en estos ejemplos es creciente de forma lineal mientras que en para las medidas de distribución ordinales, la dispersión crece hasta el vector polar y luego comienza a decrecer. Es por esta razón que las medidas de dispersión ordinales no predicen bien de forma lineal la discrepancia. Una futura línea de investigación que nos parece interesante sería analizar e interpretar la distancia entre la distribución polar máxima y la distribución uniforme.

- Estudio de posibles metodologías para la definición del vector  $\alpha$  de la matriz  $W^\alpha$  (ver 5.3).
- Desarrollo y análisis de las medidas de dispersión ordinal planteadas en esta memoria ( $\Phi_W$  y  $\Phi_{W,lref}$ ) construyendo la matriz  $W$  de forma que respete las preferencias dadas por un experto y agregando las mismas con la metodología de decisión multicriterio propuesta por Saaty (1988).
- Desarrollo y análisis de las medidas de dispersión ordinal planteadas en esta memoria ( $\Phi_W$  y  $\Phi_{W,lref}$ ) construyendo la matriz  $W$  con la metodología que se propone en García-Lapresta y Pérez-Román (2015) o en García-Lapresta *et al.* (2018).

- Búsqueda de vectores de parámetros  $\alpha$  no triviales que hagan que la medida de dispersión resultante de la matriz  $W^\alpha$  satisfaga la propiedad de mitosis (ver Proposición 5.3.c).

En el estudio de las aplicaciones propuestas de esta memoria surgen también algunos temas de investigación futura como son:

- Ser capaz de medir la discrepancia natural en un experimento como el planteado para poder diferenciar de la discrepancia debida al cambio de la naturaleza de las etiquetas (ver 6.5.2).
- Utilización de otras medidas de dispersión en el cálculo de los MOOWA.
- Desarrollo de otros operadores de agregación OWA minimizando la dispersión del vector de pesos en lugar de maximizarlo (MinOOWA).
- En relación operadores OWA, otra línea interesante sería estudiar la aplicación de las medidas de dispersión propuestas a los operadores OWA recursivos y jerárquicos (Cutello y Montero, 1994, 1995, 1999).

Finalmente, ya se ha mencionado que la variabilidad de un conjunto de datos es utilizada en multitud de contextos por lo que la aplicación de las medidas de dispersión propuestas para variables ordinales es muy variada. Como futuras líneas de aplicación se plantea el uso de estas medidas en:

- La identificación de bordes de objetos en el tratamiento de imágenes: identificación de bordes de objetos: una de las medidas para describir el borde es la variación en la intensidad del borde, para lo que se utiliza la dispersión en la intensidad de esas silueta medida frecuentemente con la entropía. Pero esto querría decir que permutaciones en las intensidades de ese borde no afectan a la valoración global. La aplicación de medidas de dispersión ordinales permitiría discriminar mejor ya que si se considera que se está trabajando con segmentos con un inicio y un fin, la dispersión no tomará el mismo valor si la intensidad alta está en una posición u otra, lo que permitiría mejorar la clasificación de los segmentos en los objetos finales. Sobre este tema

ya se ha publicado un artículo en un congreso (Flores-Vidal, Martínez, Gómez, 2018), y está previsto mandarlo a una revista de impacto pronto.

- Algunos autores (Reardon y Firebaugh 2002, Reardon 2009) utilizan las medidas de dispersión ordinal en la construcción de índices de segregación con variables de naturaleza ordinal. Una línea futura interesante sería el uso de las medidas de dispersión propuestas para la construcción de índices de segregación ordinales que de alguna manera extiendan las medidas de segregación propuestas.
- Finalmente, otra línea de investigación ya iniciada es la aplicación de las medidas de dispersión ordinal propuestas en el marco de desarrollo de índices sociales. Los índices sociales pueden considerarse un proceso de agregación y tratamiento de la información bajo un enfoque borroso en el que la utilización de medidas de dispersión ordinal en la generación de pesos para familias de OWA puede conseguir una construcción de índices sociales más precisa y robusta. Los primeros avances en esta línea han sido presentados en el congreso ESCIM 2019 (ver Martínez, N., Gómez, D., Rojas, K., Olaso, P. y Montero, J., 2019).



## 9 Bibliografía

- Agresti, A., & Agresti, B. F. (1978). Statistical analysis of qualitative variation. *Sociological methodology*, 9, 204-237.
- Akiyama, Y., Nolan, J., Darrah, M., Rahem, M. A., & Wang, L. (2016). A method for measuring consensus within groups: An index of disagreement via conditional probability. *Information Sciences*, 345, 116-128.
- Albaum, G., & Murphy, B. D. (1988). Extreme response on a Likert scale. *Psychological reports*, 63(2), 501-502.
- Allison, P. D. (1978). Measures of Inequality. *American Sociological Review* 43:865 – 880.
- Bashkansky, E., & Gadrich, T. (2008). Evaluating quality measured on a ternary ordinal scale. *Quality and Reliability Engineering International*, 24(8), 957-971.
- Beliakov, G., Gómez, D., James, S., Montero, J., & Rodríguez, J. T. (2017). Approaches to learning strictly-stable weights for data with missing values. *Fuzzy Sets and Systems*, 325, 97-113.
- Berry, K.J., & Mielke Jr., P.W., (1992). Assessment of variation in ordinal data. *Perceptual and Motor Skills* 74(1), 63-66.
- Blair, J., & Lacy, M. G. (1996). Measures of variation for ordinal data as functions of the cumulative distribution. *Perceptual and Motor Skills*, 82(2), 411-418.
- Blair, J., & Lacy, M. G. (2000). Statistics of ordinal variation. *Sociological Methods & Research*, 28(3), 251-280.
- Bozal, M.G. (2005). Escala mixta Likert – Thurstone. *ANDULI, Revista Andaluza de Ciencias Sociales*, (5), 81-95.
- Brody, C. J., & Dietz, J. (1997). On the dimensionality of two-question format Likert attitude scales. *Social Science Research*, 26(2), 197-204.

Calvo, T., Kolesárová, A., Komorníková, M., & Mesiar, R. (2002). Aggregation operators: properties, classes and construction methods. *Aggregation operators* (pp. 3-104). Physica, Heidelberg.

Carrasco, R. A., Blasco, M. F., García-Madariaga, J., & Herrera-Viedma, E. (2019). A Fuzzy Linguistic RFM Model Applied to Campaign Management. *International Journal of Interactive Multimedia & Artificial Intelligence*, 5(4).

Casper, W. C. (2013). *Constructing equal distance response anchors* (Doctoral dissertation, Oklahoma State University).

Clarke, I. (2000). Extreme response style in cross-cultural research: An empirical investigation. *Journal of Social Behavior and Personality*, 15(1), 137.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. Routledge.

Cox, E. P. (1980). The optimal number of response alternatives for a scale: A review. *Journal of Marketing Research*, 17(4), 407-422.

Cutello, V., & Montero, J. (1994). Recursive families of OWA operators. In *Proceedings of 1994 IEEE 3rd International Fuzzy Systems Conference* (pp. 1137-1141). IEEE.

Cutello, V., & Montero, J. (1995). Hierarchical aggregation of OWA operators: basic measures and related computational problems. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 3(01), 17-26.

Cutello, V., & Montero, J. (1999). Recursive connective rules. *International Journal of Intelligent Systems*, 14(1), 3-20.

David, H. A. (1998). Early sample measures of variability. *Statistical Science*, 368-377.

De Miguel, L., Gómez, D., Rodríguez, J. T., Montero, J., Bustince, H., Dimuro, G. P., & Sanz, J. A. (2019). General overlap functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 372, 81-96.

DeGroot, M. H., & Schervish, M. J. (2012). *Probability and statistics*. Pearson Education.

Duncan, O. D., & Stenbeck, M. (1987). Are Likert scales unidimensional?. *Social Science Research*, 16(3), 245-259.

Elzinga, C., Wang, H., Lin, Z., & Kumar, Y. (2011). Concordance and consensus. *Information Sciences*, 181(12), 2529-2549.

Filev, D., & Yager, R. R. (1998). On the issue of obtaining OWA operator weights. *Fuzzy sets and systems*, 94(2), 157-169.

Fisher, R. A. (1919). XV.—The correlation between relatives on the supposition of Mendelian inheritance. *Earth and Environmental Science Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 52(2), 399-433.

Fisher, R. A. (1934). *Statistical methods for research workers*. 5<sup>th</sup> Ed. Oliver and Boyd, Edinburgh.

Flores-Vidal, P. A., Martínez, N., & Gómez, D. (2018). Post-processing in edge detection based on segments. *World Scientific Series on Computer Engineering and Information Science* 11, pp. 1425 - 1432.

Franceschini, F., Galetto, M., & Varetto, M. (2004). Qualitative ordinal scales: the concept of ordinal range. *Quality Engineering* 16(4), 515 – 524.

Franceschini, F., & García-Lapresta, J. L. (2019). Decision-making in semi-democratic contexts. *Information Fusion*, 52, 281-289.

Franceschini, F., & Romano, D. (1999). Control chart for linguistic variables: a method based on the use of linguistic quantifiers. *International Journal of Production Research* 37(16), 3791 – 3801.

Fuller, R., & Majlender, P. (2001). An analytic approach for obtaining maximal entropy OWA operator weights. *Fuzzy Sets and Systems*, 124(1), 53-57.



- Fuller, R., & Majlender, P. (2003). On obtaining minimal variability OWA operator weights. *Fuzzy Sets and Systems*, 136(2), 203-215.
- Gadrich, T., & Bashkansky, E. (2012). ORDANOVA: Analysis of ordinal variation. *Journal of Statistical Planning and Inference* 142(12) 3174–3188.
- Gadrich, T., Bashkansky, E., & Zitikis, R. (2015). Assessing variation: a unifying approach for all scales of measurement. *Quality & Quantity*, 49(3), 1145-1167.
- Gagolewski, M. (2015). Spread measures and their relation to aggregation functions. *European Journal of Operational Research*, 241(2), 469-477.
- García-Lapresta, J. L., & Borge, L. (2018). Measuring Dispersion in the Context of Ordered Qualitative Scales. In *The Mathematics of the Uncertain* (pp. 605-614). Springer, Cham.
- García-Lapresta, J. L., del Pozo, R. G., & Pérez-Román, D. (2018). Metrizable ordinal proximity measures and their aggregation. *Information Sciences*, 448, 149-163.
- García-Lapresta, J. L., & Pérez-Román, D. (2015). Ordinal proximity measures in the context of unbalanced qualitative scales and some applications to consensus and clustering. *Applied Soft Computing*, 35, 864-872.
- Gardner, P. L. (1975). Scales and statistics. *Review of Educational Research*, 45(1), 43-57.
- Gini, C. (1912). Variabilità e mutabilità. *Reprinted in Memorie di metodologica statistica* (Ed. Pizetti E, Salvemini, T). Rome: Libreria Eredi Virgilio Veschi.
- Gini, C. (1921). Measurement of Inequality of Incomes. *The Economic Journal*, 31(121), 124 – 126.
- Giorgi, G. M. (1990). Bibliographic portrait of the Gini concentration ratio. *Metron*, 48(1-4), 183-221.

Giorgi, G. M. (2005). Gini's scientific work: an evergreen. *Metron*, 63(3), 299-315.

Gómez, D., & Montero, J. (2004). A discussion on aggregation operators. *Kybernetika*, 40(1), 107-120.

Gómez, D., Montero, J., & Yáñez, J. (2005). A dimension-based representation in multicriteria decision making. In *Proceedings EUSFLAT 2005* (pp. 910-915). Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona.

Gómez, D., Rodríguez, J. T., Montero, J., Bustince, H., & Barrenechea, E. (2016). n-Dimensional overlap functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 287, 57-75.

Gómez, D., Rojas, K., Montero, J., Rodríguez, J. T., & Beliakov, G. (2014). Consistency and stability in aggregation operators: An application to missing data problems. *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 7(3), 595-604.

Gómez, D., Yáñez, J., Guada, C., Rodríguez, J. T., Montero, J., & Zarrazola, E. (2015b). Fuzzy image segmentation based upon hierarchical clustering. *Knowledge-Based Systems*, 87, 26-37.

Gómez, D., Zarrazola, E., Yáñez, J., & Montero, J. (2015a). A Divide-and-Link algorithm for hierarchical clustering in networks. *Information Sciences*, 316, 308-328.

González-Betanzos, F., Leenen, I., Lira-Mandujano, J., & Vega-Valero, Z. (2013). El efecto del número de opciones de respuesta sobre las propiedades psicométricas de la medida de estrés con un instrumento aplicado a niños. *Revista Evaluar*, 12(1).

González Lobo, M.A., & Carrero López, E. (1997). *Manual de planificación de Medios*. ESIC Editorial.

Grabisch, M., Marichal, J. L., Mesiar, R. & Pap, E. (2009). *Aggregation functions* (Vol. 127). Cambridge University Press.

Guttman, L. (1974). *The basis for scalogram analysis*. Bobbs-Merrill, College Division.

Harter, H. L. (1978). *A Chronological Annotated Bibliography of Order Statistics* (Vol. 1). Pre-1950. US Government Printing Office.

Howard, J.A. (1993). *El comportamiento del consumidor en la estrategia de Marketing*. Diaz de Santos.

Jaffe-Katz, A., Budescu, D. V., & Wallsten, T. S. (1989). Timed magnitude comparisons of numerical and nonnumerical expressions of uncertainty. *Memory & Cognition*, 17(3), 249-264.

Jamieson, S. (2004). Likert scales: how to (ab) use them. *Medical education*, 38(12), 1217-1218.

Jeffreys, H. (1998). *The theory of probability*. OUP Oxford.

Jiang, H., & Eastman, J. R. (2000). Application of fuzzy measures in multi-criteria evaluation in GIS. *International Journal of Geographical Information Science*, 14(2), 173-184.

Kampen, J., & Swyngedouw, M. (2000). The ordinal controversy revisited. *Quality and quantity*, 34(1), 87-102.

Keuls, M. (1952). The use of the „studentized range” in connection with an analysis of variance. *Euphytica*, 1(2), 112-122.

Knapp, T. R. (1990). Treating ordinal scales as interval scales: an attempt to resolve the controversy. *Nursing research*, 39(2), 121-123.

Kvalseth, T.O. (1995). Coefficients of variation for nominal and ordinal categorical data. *Perceptual and Motor Skills* 80(3), 843 – 847.

Lalla, M., Facchinetti, G., & Mastroleo, G. (2005). Ordinal scales and fuzzy set systems to measure agreement: an application to the evaluation of teaching activity. *Quality and Quantity*, 38(5), 577-601.

Lehman, R. S. (1991). *Statistics and research design in the behavioral sciences*. Wadsworth/Thomson Learning.

Leik, R.K. (1966). A measure of ordinal consensus. *Pacific Sociological Review*, 9(2), 85–90.

Likert, R. (1932). A technique for the measurement of attitudes. *Archives of psychology* 22(140), 5-55.

Liu, X. (2011). A review of the OWA determination methods: Classification and some extensions. In *Recent Developments in the Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Practice* (pp. 49-90). Springer, Berlín, Heidelberg.

Marchant, T. (2006). Maximal orness weights with a fixed variability for OWA operators. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14(03), 271-276.

Martínez García, J. A., & Martínez Caro, L. (2010). La medición de la satisfacción del consumidor de servicios deportivos a través de la lógica borrosa. *Revista de Psicología del Deporte*, 19(1), 41-58.

Martínez N., Gómez D., & Montero J. (2012). Impacto de las etiquetas en la interpretación de la escala de Likert. In *ESTYLF, XVI Congreso Español sobre tecnologías y lógica Fuzzy* (pp. 253–258). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Martínez, N., Gómez, D., Olaso, P., Rojas, K., & Montero, J. (2019). A novel ordered weighted averaging weight determination based on ordinal dispersion. *International Journal of Intelligent Systems*, 34(9), 2291-2315.

Martínez, N., Gómez, D., Rojas, K., Olaso, P., & Montero, J. (In press). Social indexes segregation based on MEOWA and MOOWA aggregation operators. *Studies in Computational Intelligence*. In press.

Maxwell, A. E. (1970). Comparing the classification of subjects by two independent judges. *The British Journal of Psychiatry*, 116(535), 651-655.

- McNemar, Q. (1947). Note on the sampling error of the difference between correlated proportions or percentages. *Psychometrika*, 12(2), 153-157.
- Mesiar, R., Kolesárová, A., Gómez, D., & Montero, J. (2019). Set-based extended aggregation functions. *International Journal of Intelligent Systems* 34(9), 2039 - 2054.
- Montero, J., González-del-Campo, R., Garmendia, L., Gómez, D., & Rodríguez, J. T. (2018). Computable aggregations. *Information Sciences*, 460, 439-449.
- Mueller, J. H., Schuessler, K.F., & Costner, H.L. (1977). *Statistical reasoning in Sociology*, (3<sup>rd</sup> ed.) Boston: Houghton Mifflin.
- Newman, D. (1939). The distribution of range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation. *Biometrika*, 31(1/2), 20-30.
- O'Hagan, M. (1988). Aggregating template or rule antecedents in real-time expert systems with fuzzy set logic. In *Twenty-second Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers* (Vol. 2, pp. 681-689). IEEE.
- Oppenheim, A. N. (2000). *Questionnaire design, interviewing and attitude measurement*. Bloomsbury Publishing.
- Osgood, C. E., Suci, G. J., & Tannenbaum, P. H. (1957). *The measurement of meaning*. (No. 47). University of Illinois Press.
- Reardon, S. F. (2009). Measures of ordinal segregation. In *Occupational and residential segregation* (pp. 129-155). Emerald Group Publishing Limited.
- Reardon, S. F., & Firebaugh, G. (2002). Measures of multigroup segregation. *Sociological methodology*, 32(1), 33-67.
- Rojas, K., Gómez, D., Montero, J., & Rodríguez, J. T. (2013). Strictly stable families of aggregation operators. *Fuzzy sets and Systems*, 228, 44-63.
- Saaty, T. L. (1988). What is the analytic hierarchy process?. In *Mathematical models for decision support* (pp. 109-121). Springer, Berlin, Heidelberg.

Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*, 27(3), 379-423.

Solé Moro, M.L. (2003). *Los consumidores del siglo XXI*. ESIC Editorial.

Spiegel, M. R., Schiller, J. J., Srinivasan, R. A., & LeVan, M. (2009). *Probability and statistics* (Vol. 2). New York: Mcgraw-hill.

Stevens, S. S. (1946). On the Theory of Scales of Measurement. *Science*, 103(2684), 677-680.

Stuart, A. (1955). A test for homogeneity of the marginal distributions in a two-way classification. *Biometrika*, 42(3/4), 412-416.

Tastle, W. J., & Wierman, M. J. (2005). Consensus and dissent: a new measure of agreement. In *NAFIPS 2005. Annual Meeting of the North American Fuzzy Information Processing Society* (pp. 385-388). IEEE.

Tastle, W. J., & Wierman, M. J. (2006). An information theoretic measure for the evaluation of ordinal scale data. *Behavior research methods*, 38(3), 487-494.

Tastle, W. J., & Wierman, M. J. (2007). Consensus and dissent: A measure of ordinal dispersion. *International Journal of Approximate Reasoning*, 45(3), 531-545.

Thurstone, L. L. (1927). A law of comparative judgment. *Psychological review*, 34(4), 273.

Wallsten, T.S., Budescu, D.V., & Zwick, R. (1993). Comparing the Calibration and Coherence of Numerical and Verbal Probability Judgments. *Management Science*, 39(2), pp.176 – 190.

Watkins, M.L. (1992). The implications of extreme response style (ERS) for cross-cultural and comparative research in South Africa. *Journal of Industrial Psychology*, 18(1), pp. 13-19.

Yager, R. R. (1988). On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. *IEEE Transactions on systems, Man, and Cybernetics*, 18(1), 183-190.

Yager, R. R. (2000). Targeted e-commerce marketing using fuzzy intelligent agents. *IEEE Intelligent Systems and their Applications*, 15(6), 42-45.

Yitzhaki, S. (1998). More than a dozen alternative ways of spelling Gini. In *Research in economic inequality*.

Yitzhaki, S. (2003). Gini's mean difference: A superior measure of variability for non-normal distributions. *Metron*, 61(2), 285-316.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.

## 10 Anexos

### 10.1 Cuestionario online – Versión etiquetas lingüísticas

#### Cuestionario Difuso

Hola, ¡muchas gracias por participar en esta encuesta!, vamos con la primera pregunta:

##### 1. ¿Has comprado champú en los últimos doce meses alguna vez?

- ☐ Sí  
☐ No

¡Perfecto!, formas parte del público objetivo de este estudio que, como quizás sepas, es para un trabajo de doctorado. Este proyecto tiene dos fases por lo que al final del cuestionario te pediremos tu email o que te hagas fan de nuestra página de facebook "Doctorado Matemáticas" para poder avisarte cuando se lance la segunda fase

Esta encuesta te llevará unos 10 minutos, ¡gracias de antemano por tu colaboración en este proyecto!

##### 1. A continuación, indica por favor en qué grado estás de acuerdo con las siguientes afirmaciones:

	Muy de acuerdo	Bastante de acuerdo	Ni de acuerdo, ni en desacuerdo	Bastante en desacuerdo	Muy en desacuerdo
Cuando compro champú, dedico un tiempo a decidir cuál me llevo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Compro la misma marca de champú	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Sopeso formalmente la idea de lo importante que es la calidad del champú que estoy comprando	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Compro una marca de champú que no conozco	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Curioso en el lineal y pruebo champús diferentes que he visto anunciados	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Miro las etiquetas del champú para ver sus características específicas y/o componentes químicos	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Huelo el champú antes de comprarlo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Presto una atención especial al coste del champú, por su relevancia en el carrito de la compra	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Compro champú que está en promoción (2x1, % producto gratis, reducción de precio... etc)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
En mi decisión influye la funcionalidad del diseño del envase (forma, tapón, tamaño...etc)del champú que elijo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Me fio de la opinión de familiares y amigos a la hora de decidir qué champú utilizar	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Compro una marca de champú con la que estoy seguro/a de que se cubren mis necesidades y se resuelven mis problemas capilares	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Si no encuentro mi marca de champú, no compro ninguno y espero a la próxima compra o a ir a otro establecimiento para poder comprar la marca que quiero	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

##### 2. ¿Te consideras una persona que dedica un tiempo y una atención a la compra de productos habituales de tu cesta de la compra, como por ejemplo el champú?

- ☐ Sí ☐ No



**3. Por favor, indica en qué grado estás de acuerdo con las siguientes afirmaciones, sobre tí mismo o sobre tu hogar:**

	Muy de acuerdo	Bastante de acuerdo	Ni de acuerdo, ni en desacuerdo	Bastante en desacuerdo	Muy en desacuerdo
Reciclo vidrio	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Reciclo papel	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Reciclo plástico y envases	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Reciclo pilas	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Utilizo bombillas de bajo consumo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Presto atención a las etiquetas de los productos que compro para comprobar que son respetuosos con el medio ambiente	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Presto atención a que los envases de los productos empaquetados que compro sean fácilmente reciclables (papel, cartón, vidrio)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Utilizo bolsas ecológicas o de tela al ir a la compra	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Cierro el grifo mientras me lavo los dientes	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Si fregas los platos a mano: Presto atención a cerrar el grifo mientras los estoy fregando. Si tienes lavaplatos: Presto atención a que el lavaplatos esté al completo antes de ponerlo.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Utilizo vajilla de plástico cuando organizo una reunión en casa	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Utilizo servilletas de papel	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**4. Apago el ordenador cuando he terminado mi trabajo**

☐ Muy de acuerdo
 ☐ Bastante de acuerdo
 ☐ Ni de acuerdo, ni en desacuerdo
 ☐ Bastante en desacuerdo
 ☐ Muy en desacuerdo
 ☐ No tengo ordenador

**5. A la hora de realizar un desplazamiento en mi ciudad, que sea posible cubrir en transporte público y en transporte privado, elijo el transporte público**

☐ Muy de acuerdo
 ☐ Bastante de acuerdo
 ☐ Ni de acuerdo, ni en desacuerdo
 ☐ Bastante en desacuerdo
 ☐ Muy en desacuerdo
 ☐ Sólo dispongo del transporte público para mis desplazamientos

**6. ¿Te consideras una persona que tiene en cuenta la sostenibilidad medioambiental en tus acciones diarias?**

☐ Sí
 ☐ No

**7. Eres...**

☐ Hombre
 ☐ Mujer

**8. Si eres estudiante universitario, por favor indica qué bachillerato cursaste para acceder a los estudios universitarios que estás realizando:**

- ☐ Tecnología (Ciencias)
- ☐ Ciencias de la Naturaleza y la Salud (Ciencias mixtas)
- ☐ Humanidades y Ciencias Sociales (Letras mixtas)
- ☐ Artes (Letras)
- ☐ No soy estudiante universitario
- ☐ Otros (bachillerato en otro país, acceso mayores de 25 ...etc)

Este trabajo de investigación tiene una segunda fase que consistirá en otro cuestionario online de la misma longitud. A continuación te pediremos una serie de datos de forma que sea posible identificar las respuestas para la correcta investigación garantizando además tu anonimato.

**9. Por favor, incluye**

Tu fecha de nacimiento:      DD   MM   AAAA  
                                  /  /

**10. Por favor, incluye**

Nombre      Primer Apellido  
la INICIAL de tu...           

Ya hemos llegado al final del cuestionario, ¡muchas gracias!  
La segunda fase de esta investigación comenzará en Marzo.

Para poder aprovechar tu ayuda en este trabajo de doctorado, necesitamos que participes en las dos fases, por lo que te agradeceríamos mucho que incluyeses tu dirección de correo electrónico para poder enviarte el link del segundo cuestionario.

Te garantizamos que la dirección que incluyas será utilizada únicamente para el envío descrito anteriormente.

**1. Dirección de correo electrónico:**

Si no deseas introducir tu email, por favor, hazte fan de nuestra página de Facebook "Doctorado Matemáticas" (visita la página y cliquea sobre "Me gusta") para ser así avisado en tu facebook cuando se publique el link de la segunda parte del estudio.

<http://www.facebook.com/pages/Doctorado-Matematicas/174256662617462#/pages/Doctorado-Matematicas/174256662617462?v=wall>

Si tienes amigos universitarios que hayan comprado champú en el último año y a los que no les importaría participar en este estudio, por favor, reenvíales el link de la encuesta:

[http://www.surveymonkey.com/s/cuestionario\\_doctorado\\_1](http://www.surveymonkey.com/s/cuestionario_doctorado_1)

O remíteles el link anterior de la página de Facebook "Doctorado Matemáticas".



## 10.2 Cuestionario online – Versión etiquetas frequentistas

### Cuestionario Frequentista

Hola, ¡muchas gracias por participar en la segunda parte de este trabajo! Como ya anticipamos, se trata de un cuestionario de duración similar al anterior. Vamos con la primera pregunta:

#### 1. ¿Has comprado champú en los últimos doce meses alguna vez?

☐ Sí

☐ No

¡Perfecto!, formas parte del público objetivo de esta segunda fase. Comenzamos con las preguntas de este cuestionario:

#### 1. A la hora de comprar un champú, ¿con qué frecuencia...

	Alrededor del 100% de las veces que compro champú	Alrededor del 75% de las veces que compro champú	Alrededor del 50% de las veces que compro champú	Alrededor del 25% de las veces que compro champú	Alrededor del 0% de las veces que compro champú
...dedicas un tiempo a decidir cuál te llevas?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...compras la misma marca de champú?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...sopesas formalmente la idea de lo importante que es la calidad del champú que estás comprando?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...compras una marca de champú que no conoces?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...curioseas en el lineal y pruebas champús diferentes que has visto anunciados?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...miras las etiquetas del champú para ver sus características específicas y/o componentes químicos?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...huele el champú antes de comprarlo?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...prestas una atención especial al coste del champú, por su relevancia en el carrito de la compra?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...compras el champú que está en promoción (2x1, % producto gratis, reducción de precio... etc)?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...influye en tu decisión la funcionalidad del diseño del envase (forma, tapón, tamaño...etc)del champú que eliges?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...te fías de la opinión de familiares y amigos a la hora de decidir qué champú utilizar?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...compras una marca de champú con la que estás seguro de que se cubren tus necesidades y se resuelven sus problemas capilares?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
...dejas de comprar champú si no encuentras tu marca y esperas a la próxima compra o a ir a otro establecimiento para poder comprar la marca que quieres?	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

#### 2. ¿Te consideras una persona que dedica un tiempo y una atención a la compra de productos habituales de tu cesta de la compra, como por ejemplo el champú?

☐ Sí

☐ No

**3. ¿Con qué frecuencia realizas (o se realizan en tu hogar) las siguientes acciones?:**

	Alrededor del 100% del/ (de las) que utilizo	Alrededor del 75% del/ (de las) que utilizo	Alrededor del 50% del/ (de las) que utilizo	Alrededor del 25% del/ (de las) que utilizo	Alrededor del 0% del/ (de las) que utilizo
Reciclas vidrio	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Reciclas papel	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Reciclas plástico y envases	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Reciclas pilas	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Utilizas bombillas de bajo consumo	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**4. ¿Con qué frecuencia realizas (o se realizan en tu hogar) las siguientes acciones?:**

	Alrededor del 100% de las veces	Alrededor del 75% de las veces	Alrededor del 50% de las veces	Alrededor del 25% de las veces	Alrededor del 0% de las veces
Prestas atención a las etiquetas de los productos que compras para comprobar que son respetuosos con el medio ambiente	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Prestas atención a que los envases de los productos empaquetados que compras sean fácilmente reciclables (papel, cartón, vidrio)	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Utilizas bolsas ecológicas o de tela al ir a la compra	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Cierras el grifo mientras te lavas los dientes	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Si friegas los platos a mano: Prestas atención a cerrar el grifo mientras los estás fregando. Si tienes lavaplatos: Prestas atención a que el lavaplatos esté al completo antes de ponerlo.	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Utilizas vajilla de plástico cuando organizas una reunión en casa	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>
Utilizas servilletas de papel	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>	<input type="radio"/>

**5. ¿Con qué frecuencia apagas el ordenador cuando has terminado tu trabajo?**

☐ Alrededor del 100% de las veces que utilizo el ordenador
 ☐ Alrededor del 75% de las veces que utilizo el ordenador
 ☐ Alrededor del 50% de las veces que utilizo el ordenador
 ☐ Alrededor del 25% de las veces que utilizo el ordenador
 ☐ Alrededor del 0% de las veces que utilizo el ordenador
 ☐ No tengo ordenador

**6. A la hora de realizar un desplazamiento en tu ciudad, que sea posible cubrir en transporte público y en transporte privado, ¿con qué frecuencia eliges el transporte público?**

☐ Alrededor del 100% de los desplazamientos de este tipo
 ☐ Alrededor del 75% de los desplazamientos de este tipo
 ☐ Alrededor del 50% de los desplazamientos de este tipo
 ☐ Alrededor del 25% de los desplazamientos de este tipo
 ☐ Alrededor del 0% de los desplazamientos de este tipo
 ☐ Sólo dispongo del transporte público para mis desplazamientos

**7. ¿Te consideras una persona que tiene en cuenta la sostenibilidad medioambiental en tus acciones diarias?**

☐ Sí
 ☐ No

**8. Eres...**

☐ Hombre

☐ Mujer

**9. Si eres estudiante universitario, por favor indica qué bachillerato cursaste para acceder a los estudios universitarios que estás realizando:**

☐ Tecnología (Ciencias)

☐ Ciencias de la Naturaleza y la Salud (Ciencias mixtas)

☐ Humanidades y Ciencias Sociales (Letras mixtas)

☐ Artes (Letras)

☐ No soy estudiante universitario

☐ Otros (bachillerato en otro país, acceso mayores de 25 años...etc)

Como ya sabes, este cuestionario es la segunda fase de un trabajo de investigación de doctorado. A continuación te pediremos de nuevo una serie de datos para que sea posible identificar las respuestas garantizando tu anonimato.

**10. Por favor, incluye**

Tu fecha de nacimiento:  DD /  MM /  AAAA

**11. Por favor, incluye**

Nombre  Primer Apellido   
la INICIAL de tu...

Ya hemos finalizado el cuestionario. ¡MUCHAS GRACIAS POR TU COLABORACIÓN en las dos fases de este trabajo!

**12. Si estás interesado en conocer los resultados de este estudio, incluye tu dirección de email y será un placer compartir contigo las conclusiones una vez finalizado el trabajo (a partir de Julio de 2011)**

Si reenviaste la primera fase de este cuestionario a tus amigos, por favor, reenvíales el link de esta segunda fase:  
[http://www.surveymonkey.com/s/cuestionario\\_doctorado\\_2](http://www.surveymonkey.com/s/cuestionario_doctorado_2)



## 10.3 Tablas de contingencia

		Frecuentista					
Lingüístico	C1	1 ~ 0%	2 ~ 25%	3 ~ 50%	4 ~ 75%	5 ~ 100%	
	1 - MD	3	4	2	0	1	10
	2 - D	3	8	6	2	0	19
	3 - N	0	3	6	3	0	12
	4 - A	2	9	11	11	4	37
	5 - MA	0	2	1	4	9	16
		8	26	26	20	14	94
	C2	1	2	3	4	5	
	1	1	3	2	1	0	7
	2	0	4	3	3	2	12
3	2	1	3	6	4	16	
4	0	4	6	24	3	37	
5	0	0	3	6	13	22	
	3	12	17	40	22	94	
C3	1	2	3	4	5		
1	1	3	1	1	0	6	
2	0	3	3	1	3	10	
3	0	5	4	3	2	14	
4	0	4	10	23	6	43	
5	0	2	1	4	14	21	
	1	17	19	32	25	94	
C4	1	2	3	4	5		
1	24	14	2	2	1	43	
2	10	13	5	0	0	28	
3	2	2	5	1	0	10	
4	2	2	2	1	0	7	
5	1	0	1	1	1	4	
	39	31	15	5	2	92	
C5	1	2	3	4	5		
1	11	4	1	2	1	19	
2	10	15	6	1	2	34	
3	0	6	6	5	3	20	
4	0	6	3	10	0	19	
5	0	1	0	1	0	2	
	21	32	16	19	6	94	
C6	1	2	3	4	5		
1	13	9	0	0	1	23	
2	9	8	3	1	0	21	
3	0	6	2	3	0	11	
4	3	5	0	8	3	19	
5	7	1	3	3	7	21	
	32	29	8	15	11	95	
C7	1	2	3	4	5		
1	20	1	1	2	0	24	
2	6	2	0	0	0	8	
3	3	5	4	4	2	18	
4	2	2	3	7	3	17	
5	0	0	2	8	18	28	
	31	10	10	21	23	95	

	C8	1	2	3	4	5	
1	2	1	1	1	0	0	5
2	3	8	3	2	0	0	16
3	3	6	8	6	3	0	26
4	2	3	7	17	5	0	34
5	0	1	2	2	8	0	13
	10	19	21	28	16	0	94
	C9	1	2	3	4	5	
1	10	4	0	3	0	0	17
2	5	7	3	0	0	0	15
3	0	9	5	3	2	0	19
4	2	3	10	13	2	0	30
5	0	0	3	4	5	0	12
	17	23	21	23	9	0	93
	C10	1	2	3	4	5	
1	12	7	5	1	0	0	25
2	11	11	1	1	2	0	26
3	7	7	7	5	0	0	26
4	1	5	2	4	2	0	14
5	0	2	1	0	1	0	4
	31	32	16	11	5	0	95
	C11	1	2	3	4	5	
1	3	1	0	2	1	0	7
2	3	3	5	2	0	0	13
3	0	5	9	9	0	0	23
4	0	6	11	17	5	0	39
5	0	3	4	4	2	0	13
	6	18	29	34	8	0	95
	C12	1	2	3	4	5	
1	0	1	0	0	0	0	1
2	1	1	0	2	0	0	4
3	1	3	2	3	2	0	11
4	1	5	2	18	19	0	45
5	0	0	2	9	23	0	34
	3	10	6	32	44	0	95
	C13	1	2	3	4	5	
1	20	0	3	2	1	0	26
2	5	6	3	2	1	0	17
3	4	5	4	3	1	0	17
4	1	2	2	8	3	0	16
5	1	0	2	7	8	0	18
	31	13	14	22	14	0	94

		Frecuentista					
Lingüístico	S1	1 ~ 0%	2 ~ 25%	3 ~ 50%	4 ~ 75%	5 ~ 100%	
	1 - MD	7	0	0	0	1	8
	2 - D	1	2	1	0	0	4
	3 - N	2	0	2	0	0	4
	4 - A	0	1	0	3	5	9
	5 - MA	1	0	1	9	59	70
		11	3	4	12	65	95
	S2	1	2	3	4	5	
	1	5	3	0	0	0	8
	2	1	0	2	0	1	4
3	0	0	0	0	0	0	
4	1	1	2	6	5	15	
5	0	1	0	14	53	68	
	7	5	4	20	59	95	
S3	1	2	3	4	5		
1	5	1	0	0	0	6	
2	3	0	1	0	0	4	
3	0	0	1	0	0	1	
4	1	2	1	4	7	15	
5	0	0	1	9	58	68	
	9	3	4	13	65	94	
S4	1	2	3	4	5		
1	6	0	0	0	1	7	
2	0	1	0	1	1	3	
3	0	2	2	1	1	6	
4	0	1	1	7	5	14	
5	2	2	4	9	48	65	
	8	6	7	18	56	95	
S5	1	2	3	4	5		
1	4	0	1	1	0	6	
2	1	0	3	0	0	4	
3	0	2	7	1	0	10	
4	2	2	10	15	1	30	
5	0	3	0	18	23	44	
	7	7	21	35	24	94	
S6	1	2	3	4	5		
1	16	3	1	0	1	21	
2	7	9	4	1	0	21	
3	4	9	6	4	1	24	
4	2	7	7	7	0	23	
5	0	0	1	4	1	6	
	29	28	19	16	3	95	
S7	1	2	3	4	5		
1	15	0	1	1	1	18	
2	8	1	4	4	0	17	
3	7	9	9	2	1	28	
4	1	3	4	8	4	20	
5	0	1	4	3	2	10	
	31	14	22	18	8	93	

S8	1	2	3	4	5		
1	14	3	1	0	0	18	
2	6	3	6	1	0	16	
3	2	5	7	4	3	21	
4	1	3	3	10	3	20	
5	0	0	1	10	9	20	
	23	14	18	25	15	95	
S9	1	2	3	4	5		
1	1	0	0	0	1	2	
2	0	0	0	0	0	0	
3	0	0	1	1	0	2	
4	1	1	2	6	9	19	
5	2	0	0	8	62	72	
	4	1	3	15	72	95	
S10	1	2	3	4	5		
1	0	0	0	0	0	0	
2	0	0	0	0	0	0	
3	1	1	3	2	1	8	
4	0	3	3	8	8	22	
5	1	3	2	10	49	65	
	2	7	8	20	58	95	
S11	1	2	3	4	5		
1	18	5	2	4	1	30	
2	7	6	3	1	1	18	
3	5	12	4	3	0	24	
4	0	3	2	6	1	12	
5	0	3	1	3	4	11	
	30	29	12	17	7	95	
S12	1	2	3	4	5		
1	0	0	0	0	0	0	
2	2	3	6	2	0	13	
3	1	4	1	3	2	11	
4	1	2	2	4	8	17	
5	0	1	2	8	42	53	
	4	10	11	17	52	94	
S13	1	2	3	4	5		
1	1	5	1	2	0	9	
2	2	4	3	2	1	12	
3	0	1	1	1	0	3	
4	0	3	6	17	7	33	
5	0	0	2	7	29	38	
	3	13	13	29	37	95	
S14	1	2	3	4	5		
1	3	7	2	0	1	13	
2	3	6	3	0	0	12	
3	1	2	5	1	1	10	
4	1	1	4	12	3	21	
5	0	0	3	11	12	26	
	8	16	17	24	17	82	

## 10.4 Gráficos de distribuciones frecuentistas condicionadas a cada etiqueta lingüística

